摘要

本文提出了在能导致双轴弯曲和轴力的往复荷载下，钢筋混凝土构件分析中的一个可靠和高计算效率的梁-柱有限元模型。单元被离散成纵向钢筋和混凝土纤维，这样截面的力-变形关系可由纤维应力-应变关系积分推导出来。目前单元的非线性性能均由钢筋和混凝土纤维的非线性应力-应变关系推到得到。

我们提出的梁-柱单元基于小变形和平截面假设。单元的列式由混合法建立：用插值函数表示的单元内部应力分布满足平衡，是列式的出发点。在混合法的概念上可以看出，通过对单元变形场基于柔度的形函数的选择，最后可以得出足够简化的方程。通过这一特殊的变形形函数的选择，通常的混合法可以缩减为特殊情况的柔度法（flexibility method）。但是，混合法列式在理解确定单元的状态这一过程很有用。

在梁-柱单元的刚度阵和抵抗力计算中，引入了特殊的基于柔度的状态确定（state determination）的算法。所提出的单元状态确定的非线性算法是很平常的方法，并可以在任何截面的非线性力-变形关系中应用。该算法使用了迭代法，可以收敛到满足材料本构关系的一个状态，误差不超过规定的限值。在单元迭代过程中，通过假设的力和变形的插值函数，单元的平衡和协调性能严格的满足。我们提出的方法被证实有稳定和强劲的计算性，比如应变强化、颈缩以及在节点和单元往复荷载下的软化。

本文还介绍了在单元荷载下基于柔度法的梁有限元模型。该方法是确定单元状态算法的自然延伸，并以在单元荷载下内力分布精确为前提。相应的单元端部固端力由确定单元状态的迭代过程来决定。

通过对比对大量钢筋混凝土构建的试验结果和理论分析结果，可以体现出我们所提出的模型描述钢筋混凝土构件滞回性能的能力。从一些参数的分析可以得到单元控制截面的反应敏感程度，和所选的极限强度的准确性。

感谢

本文是钢筋混凝土结构地震响应研究的一部分，该研究由授权号为 RTA-59M848 的加州交通局关于钢筋混凝土路面结构研究和授权号为 ECE-8657525 的国家科学基金会关于钢筋混凝土房屋结构研究两个项目支持。非常感谢他们的支持。本文所提出的观点仅代表作者的意见，与项目发起人无关。

笔者感谢 UCB 的 G.H. Powell 和 R.L. Taylor 教授和罗马大学 La Sapienza 的 V. Ciampi 教授在本文写作过程中的丰富的讨论和建议。

目录

第一章 介绍

1.1 概述

在高烈度地震区结构设计寿命期间所预计发生的大震情况下，结构通常不能只表现出弹性反应。当前的抗震设计规范指出结构仅在小震下表现弹性反应，并应该能在中震到大震的不同烈度地震下产生不同程度的破坏。由地震激发的钢筋混凝土结构的响应由多种因素决定，比如地震特征、地基条件和结构性质等。

决定钢筋混凝土结构的结构性质是评估其地震响应的很重要的一步。通常，这一评估包含初始刚度、极限承载能力、不同的整体和局部延性要求等参数。一些情况下可能需要评估结构经历强震后的残余刚度和承载能力。一个完整的钢筋混凝土结构的抗震设计评估通常需要非线性动力分析。由于真实结构的不同构件之间的复杂相互作用，响应一开始直至结构失效的动力特征并不能从单一的按缩小缩小的模型的动力试验得出。此外，此类试验的成本通常很大，大型试件尤甚。

随着时间的发展，通过对周期往复荷载下结构的构件和减缩子组合（reduced-sacle subassemblages）的静力试验，已经克服了以上的这些困难。这些试验结果也用于滞回模型的发展和标准化过程，该模型使用有限的试验数据外推出其他情况和完整结构的动力响应。在这些综合研究中发展出了一系列钢筋混凝土结构非线性响应研究的模型。按照细化和复杂的程度可以把它们分成三个大类：

整体模型。结构非线性响应集中在选定的自由度中。比如，一个多层结构的响应可以由每层仅有一个侧向自由度的系统表示。每个自由度有层间剪力-侧移响应的滞回性能。这些模型可用在估计层间侧移和变形延性需求的初步设计阶段。这类模型的精确预测整体位移的可靠性不强，也几乎不可能从有限自由度中提取内部构建的受力情况。

离散有限元模型。结构模型由相互相连的单元组成，这些单元能描述钢筋混凝土构件的滞回性能。在平均意义上的单元层次上和截面层次上都引入了非线性本构。相应的，有两种单元列式方法：（a）集聚非线性法；（b）分布非线性单元模型。

微观有限元模型。构件和节点被离散成大量的有限元。本构和几何非线性通常在应力应变层次描述或在有限区域中平均化。包含钢筋和混凝土的粘接退化、裂缝处的相互摩擦、徐变、松弛、热力现象和几何非连续裂缝等物理非线性问题可以通过这类模型研究。

当前研究主要是第二类模型。离散有限元模型很好的兼顾了非线性抗震研究的简洁性和精确性，并呈现出了简单而又能足够深入的研究构件和整体结构的地震响应的特点。整体模型基于太过粗糙的近似，并不能提供结构的力、变形和损害分布的足够的信息。而微观有限元法则局限于关键部位的研究，因为这些模型受制于大型非线性动力分析中的昂贵的计算费用，比如一个简单的框架模型就涉及到大量的自由度。在陈述本文所提出的梁-柱有限元之前，我们纵览了目前存在的离散模型。

1.2 有限元法的文献概况

下面回顾一下已有的有关钢筋混凝土框架结构的非线性地震响应的分析方法。我们已经持续多年不遗余力的研究这些结构响应的非弹性部分的建模和分析，本文也汇总了这一研究当前的发展情况。按时间顺序先介绍集中塑性模型再介绍分布非线性模型。同样，也回顾了刚度法和柔度法以及它们在钢筋混凝土构件分析中的适用性。最后，详细的阐述了把截面划分成纤维的分布非线性模型，因为其更佳的性能和与本文所讨论的梁-柱模型更相关。

1.2.1 集聚模型

在地震作用激发下，钢筋混凝土框架的非弹性行为通常集中在梁柱的端部，因此，早期对这一行为的建模是假设构件端部为非线性弹簧形式的零长度塑性铰。根据列式的方法，这些模型的多个弹簧通过串联或并联连接。

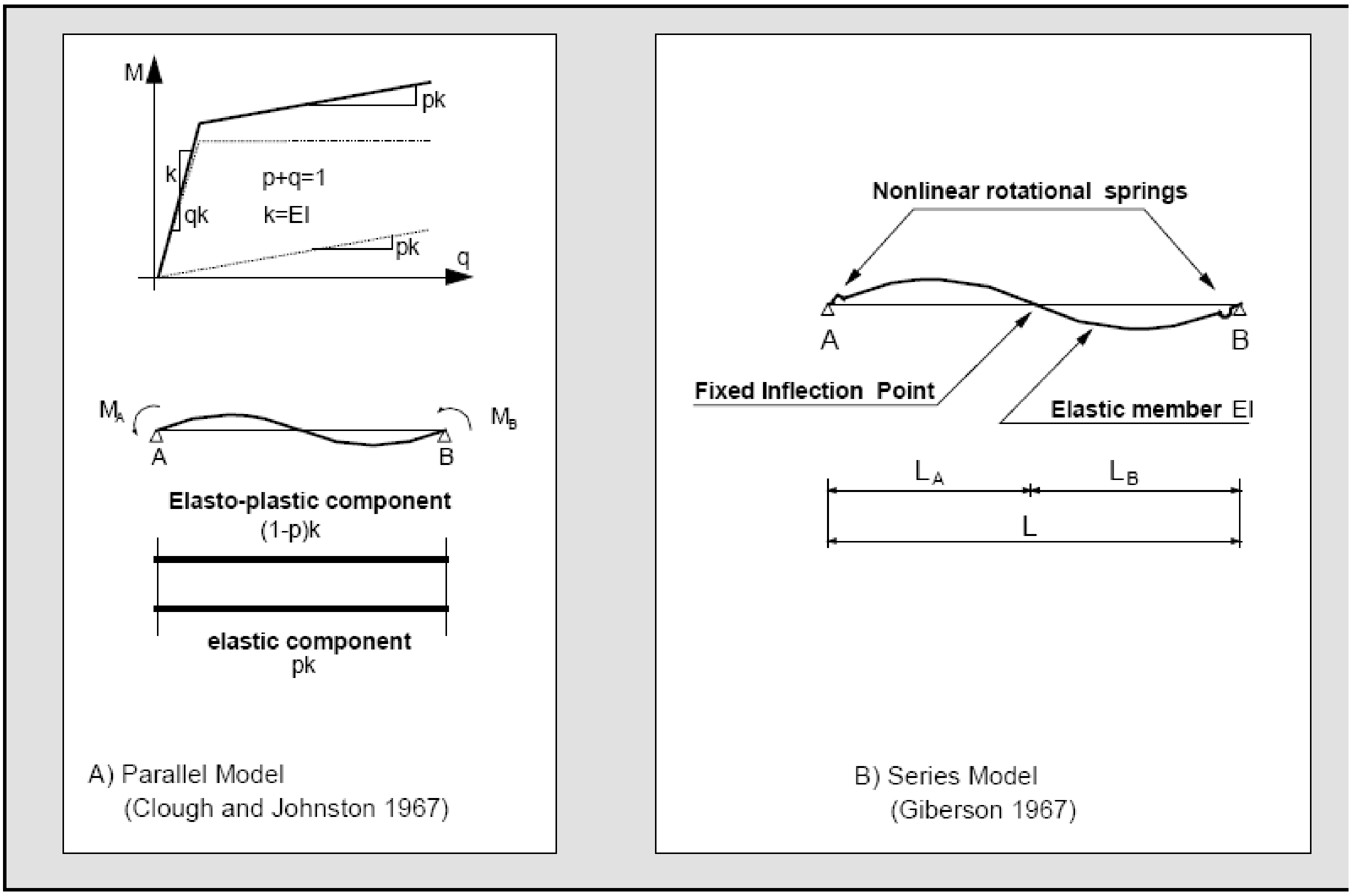


图 1.1-简单的集中塑性模型

A） Clough and Johnston 模型

B） Giberson 模型

如图 1.1a 所示，最早由 Clough 和 Johnston 提出的并联弹簧单元考虑到了双线性弯矩-转角关系：单元由两个并联的单元组成，用理想弹塑性来表示屈服而用完全弹性表示应力增强。构件的刚度阵由单元刚度阵叠加得到。考虑到钢筋混凝土构件裂缝的影响，Takizawa（1976）把这个模型归结为单调多重线性模型。尽管该模型据说早已开始应用，由 Giberson（1976）正式提出该模型。图 1.1b 所示的模型的原本形式，由具有连接每个固端的等效非线性旋转弹簧的线弹性单

元组成，单元的非线性变形集中在端部的弹簧。这个模型比之最初的 Clough 模型更为通用，因为它可以通过适当的选择端部弹簧的弯矩-转角关系，来描述更复杂的滞回性能。由于钢筋混凝土构件的滞回性能更多由实验观察得出，所以该模型更具有吸引力。

图 1.2 显示了一些最近提出的集中塑性本构模型，这些模型包括在弯剪下的周期性刚度退化（Clough angd Benuska 1966，Takeda et al. 1970,Brancaleoni et al. 1983）,往复荷载下的颈缩（Banon et al,1981 Brancaleoni et al/1983）和由与钢筋拔出的梁柱节点表面的固端旋转（Otani 1974,Filippou andIssa 1988）。通常忽略轴向弯曲的耦合影响。 从 Ozdemir 的 basic endochronic theory formulation 中总结出本构的非线性率，来表示非线性弹簧的连续滞回关系。Iwan（1987）深入研究了适用与这些模型的数学函数。具有争议的是如何选取能代表钢筋混凝土构建试验滞回性能的参数，因而产生两个基本问题：（a）模型的参数不仅只由截面参数确定，也受荷载和变形时程的影响，因而限制了该方法的推广；（b）一个一致而又合理的模型参数选择需要特殊的算法，来保证它是分析结果和实验数据的最小二乘拟合。在选择 Brancaleoni 等人提出的弯矩-曲率关系的参数用到的 formal system identification method 中，Ciampi 和 Nicoletti（1986）用到了这种算法。

在梁-柱和结构墙的建模中，明确包含了单轴或双轴弯曲条件下需要轴向荷载时的抗弯强度。在大多集中塑性模型中，轴力-弯矩相互作用由应力合力下表面屈服和遵循经典塑性理论（Prager and Hodge 1951）原则的相关流动法则（Flow rule）来描述。在端荷载作用下，单元弯曲和轴向刚度相互独立不耦合，所以响应假设应力状态是线性的，处于屈服面以内。通过多重屈服（multiple yield）、荷载表面和响应的强化原则的引入，Takayanagi 和 Schnobrich（1979）最先提出，弹簧可以由包含裂缝和周期刚度折减的多重线性本构模型表示。

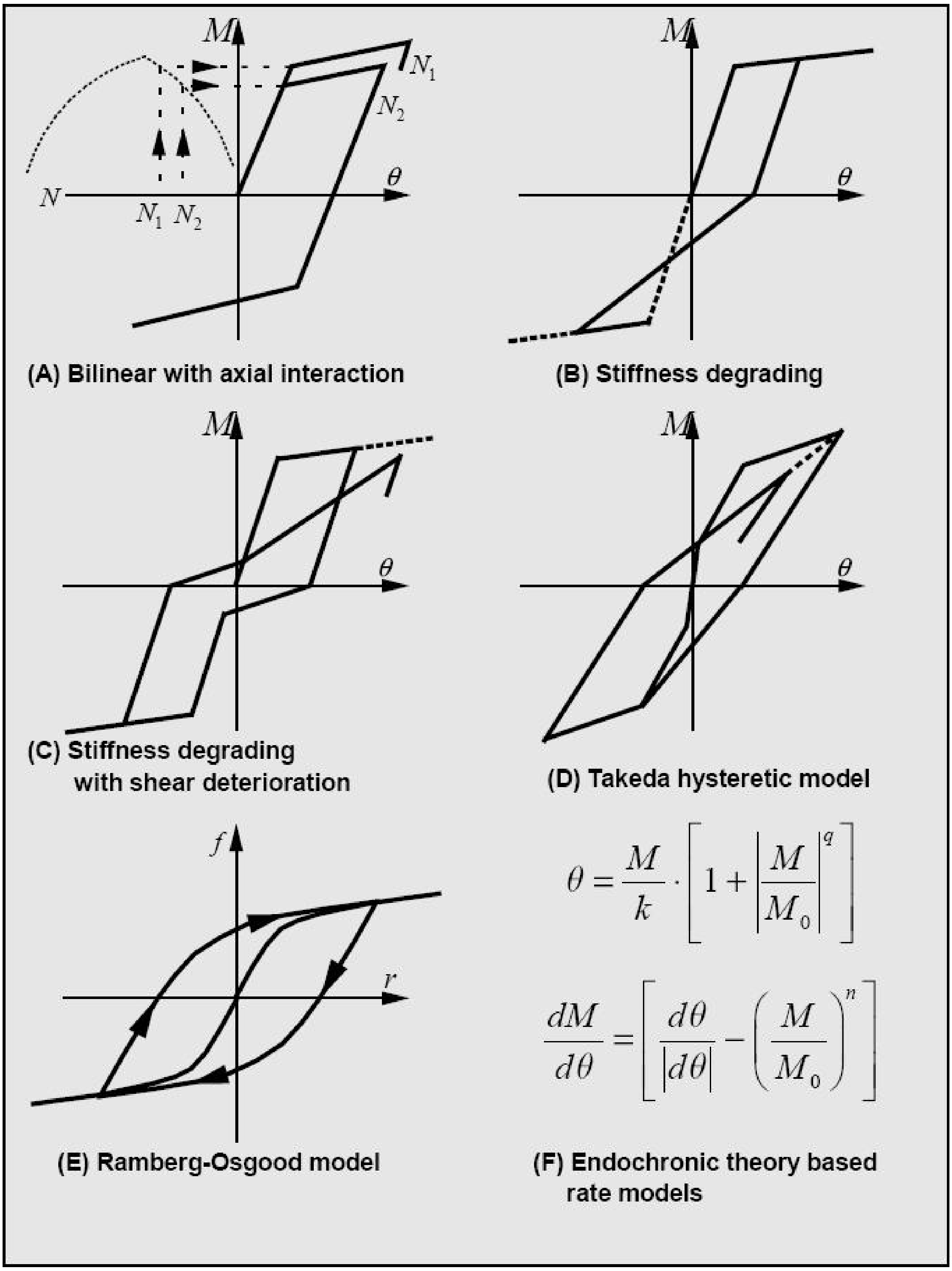


图 1.2-建议的非线性弹簧的本构模型

集中（集聚）模型是对真实反应的简化，涉及到单元内的非弹性变形的缓慢扩散这一荷载作用时间的函数。这一模型的不足在很多相关的研究中凸现出来，特别是在由 Charney and Bertero（1982）and Bertero 等（1984）描述的有关框架剪力墙结构的大型抗弯构件中。集中模型基本的特点在于它的简单性，减少了存储要求和计算成本，并改进了计算的数值稳定性。然而，大多数集中模型过分的简化了钢筋混凝土构件的滞回性能等重要信息，因而应用并不广泛。在对决定弹簧参数的预先假设的约束中，可以看出其局限性的一个例子。由 Abagnostopoulos

（1981）提出的单调荷载下梁的参数和理论研究，指出模型参数和施加的荷载模式以及非弹性变形的程度严重关联，在动力反应中没有参数因子保持不变。由于这样的时程关联，整体的破坏预测，特别是局部水平的预测，可能并不准确。这些信息仅能通过更加细化的能表述与轴向荷载成函数关系的截面滞回性能的模型来获得。集中模型另一个通病是它们不能充分描述钢筋混凝土构件的变形软化性能。这种变形软化可以通过受轴向荷载的悬臂梁在端部位侧向变形的增加下抗侧力的退化观察到。所以这里需要更佳高级的模型

Prager 等(1951)归纳的钢筋混凝土柱应力应变相关变量的刚塑性理论（rigid plastic theory），比如弯矩和旋转，轴力和拉伸，也限制了这些模型在详细描述的关键区域的非弹性大变形能力的构件中的应用。对于钢筋混凝土柱截面，应力导致的屈服面是与相应的唯一分量耦合的应力的函数。这与并不考虑变形软化和假设截面变形能力没有限制的几点塑性理论相矛盾。

为改进经典塑性理论在描述轴力和弯矩相互作用时的一些缺陷，Lai 等（1984）提出了纤维绞模型，包括延伸至钢筋混凝土单元通长的线性弹性单元并在在每端有一个非弹性单元，如图 1.3 所示。每个非弹性单元由每个截面的非弹性弹簧组成，表示了纵向钢筋和仅在受压时有效的核心混凝土弹簧。端截面用 5 个弹簧离散，可以模拟钢筋混凝土构件在比经典塑性理论的情况下更平常的轴力-双轴弯矩相互作用。在 Lai 的模型中，有效钢筋弹簧的力-变形关系遵循 Takeda 的模型，但决定性能的参数由平衡关系得出。

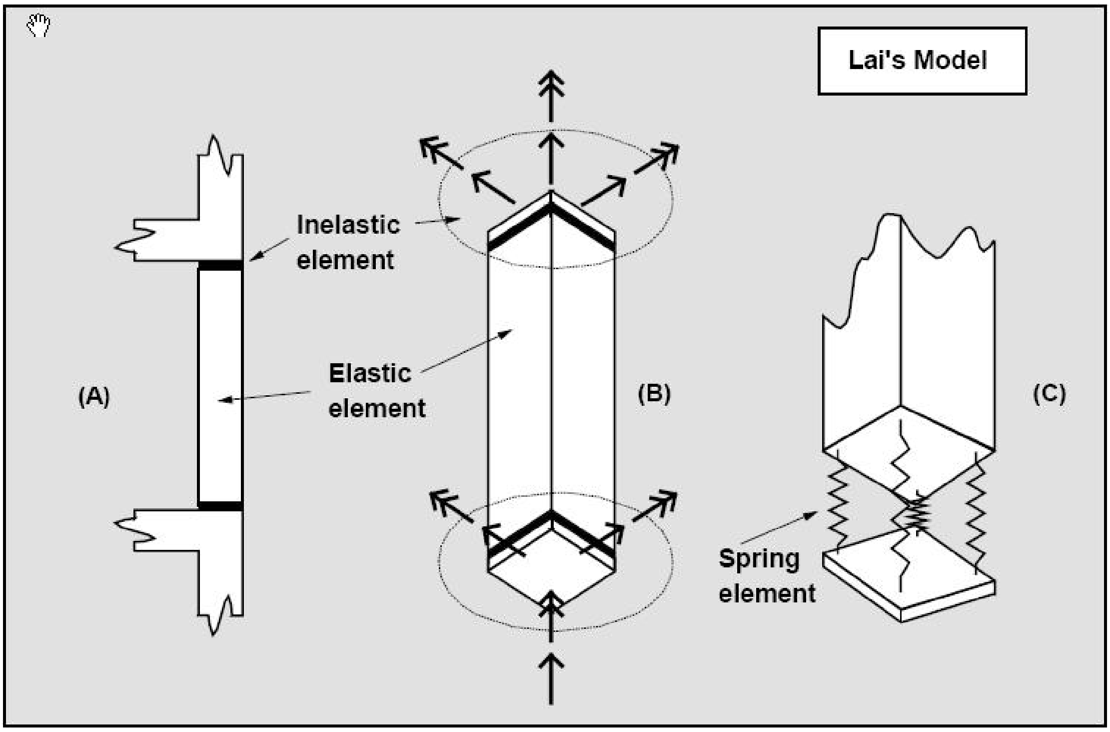


图 1.3-Lai 的模型：双轴弯曲和轴力作用下钢筋混凝土梁-柱的退化非弹性单元

（A）框架中的单元（B）单元模型（C）非弹性单元

1.2.2 分布非线性模型

对于钢筋混凝土构件一个更精确的描述是用分布非线性模型。与积聚塑性模型相比，任意单元截面都可以定义材料非线性，且单元响应由截面响应的加权积

分推导出。实际上，由于单元积分采用数值方法，所以只需考虑所选截面积分点的响应即可。相应的，作为单元主要未知量的单元变形或单元内力通过单元整体变形或力的合适的插值函数得出。离散的裂缝用涂抹掉有限长度的方法处理而不用精确的去考虑。横截面的本构特征通过 2 种方法来列式：a 依据经典塑性理论的应力或应变合力，b 由把横截面离散成纤维的精确推导，比如扩散塑性纤维模型。这些模型通常有平截面假定，这样沿着横截面应变是线性的。

早期的梁-柱模型忽视了轴力和弯矩的耦合作用，其通常何以看做两个悬臂梁在单元的反弯点相连，如图 1.4 显示了 Otani（1974）提出的模型。在推导悬臂梁的刚度时，无力矩端部变形和无力矩端部旋转采用了独立的滞回性能（hysteresis rule）。为克服单元列式中的数值计算困难，比如非对称的刚度阵，Otani 假设非弹性变形集中在单元端部的等效弹簧上，这样的假设造成了该模型不具备一般性。Otani 模型的整体响应通过两个悬臂梁的曲率积分得出。这一类模型的局限性在于假设单元的反弯点是固定的。

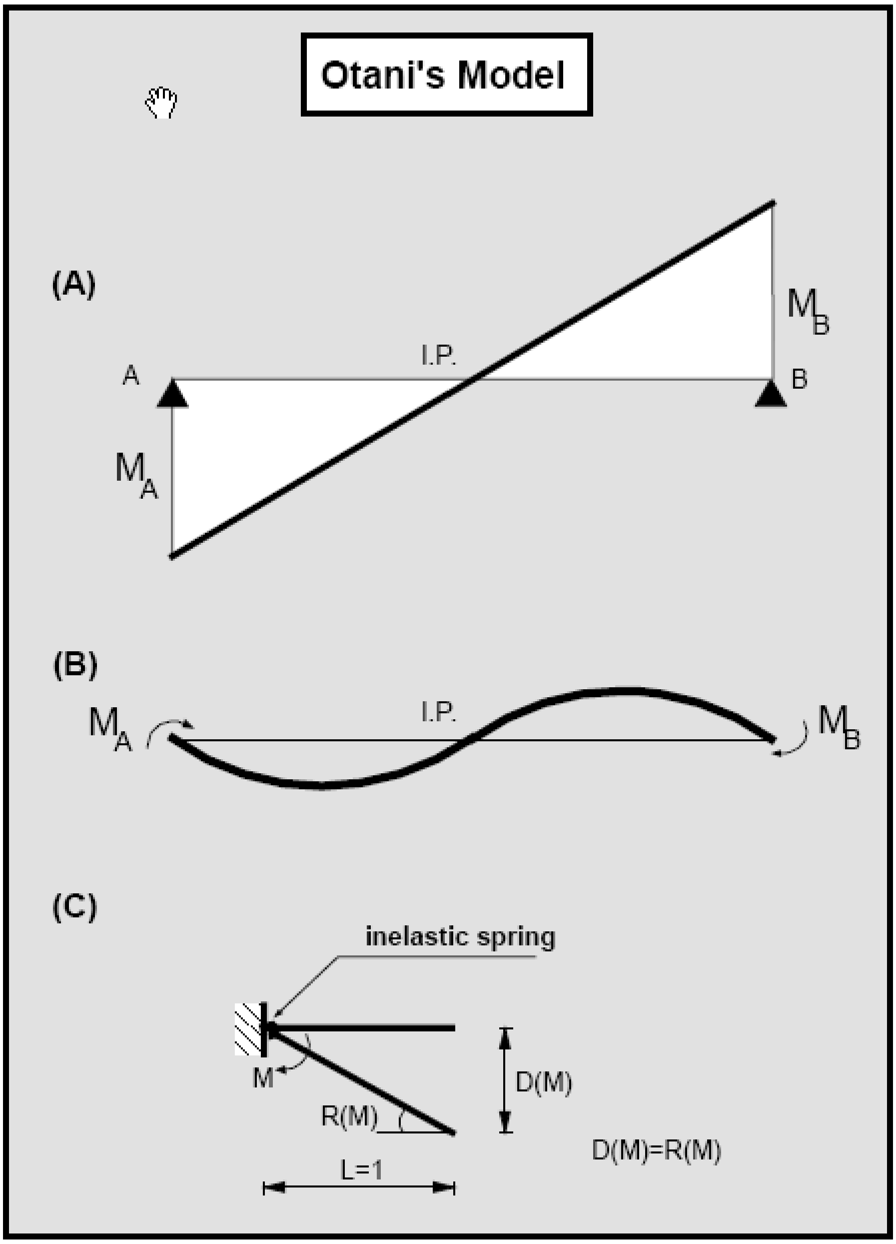


图 1.4-Otani 模型：A）弯矩分布 B）单元变形 C）等效非弹性弹簧

由 Soleimani 等人提出的模型中，非弹性变形区域是荷载时程的函数，缓慢的从梁-柱单元的表面扩散至内部。梁的剩余部分仍保持弹性。梁-柱交界处的固端旋转通过单元端部植入点绞（point hinge）进行建模。这与端截面响应的曲率相关，其中有效长度系数在响应时程中保持不变。Meyer 等提出了非常类似的模型。在重新加载时，计算塑性区刚度的方法稍有不同，它使用 Takeda 模型来描述滞回的弯矩-曲率关系，其并未考虑固端的旋转。原始模型后来被 Roufaiel and Meyer（1987）延伸至包含了基于一组经验条理（rules）的弯曲滞回性能的剪力和轴力影响。其中并未考虑由于倾覆力矩导致轴力的变化。Darvall and Mendis（1985）提出了一个类似但更简单的模型，它通过 3 重线性的弯矩-曲率关系来定义端部非弹性变形，这样端部绞可以保持完全塑性或显著塑性的软化或强化。完全塑性较集中在一个点，而软化或强化绞由用户定义为有限的、固定的长度，通常假设为 0.75-1d，其中 d 是横截面的有效高度。

Takayanagi and Schnobrich（1979）建议把单元划分为有限个短的纵向单元，每个都由非线性旋转弹簧表示。图 1.5 显示了该模型。每一个纵向单元的性质由其中点的弯矩确定并假设在整个纵向单元上保持不变。可以通过静态凝聚来使该多弹簧模型变为单个的梁-柱单元。尽管单元非线性响应最终积聚在端部弹簧上，这种单元还是属于分布非线性单元，因为它考虑了沿单元通长的非弹性变形。多弹簧模型最先在双肢剪力墙的的地震响应研究中用到，其中显示了轴力的明显变化。为考虑轴力和弯矩的相互作用，旋转弹簧引入了三维有限面的概念。

Filippou and Issa（1988）同样把单元划分为不同的子单元，不过方法不同。每个子单元描述一个单独的效应，比如受弯导致的非弹性响应，界面处的剪切响应或梁柱节点处的粘接滑移响应，这些响应的相互影响通过子单元的组合来实现。该方法使得独立子单元的滞回性能更简单，但整个单元仍然可以通过不同子单元的相互作用而呈现出复杂的滞回性能。

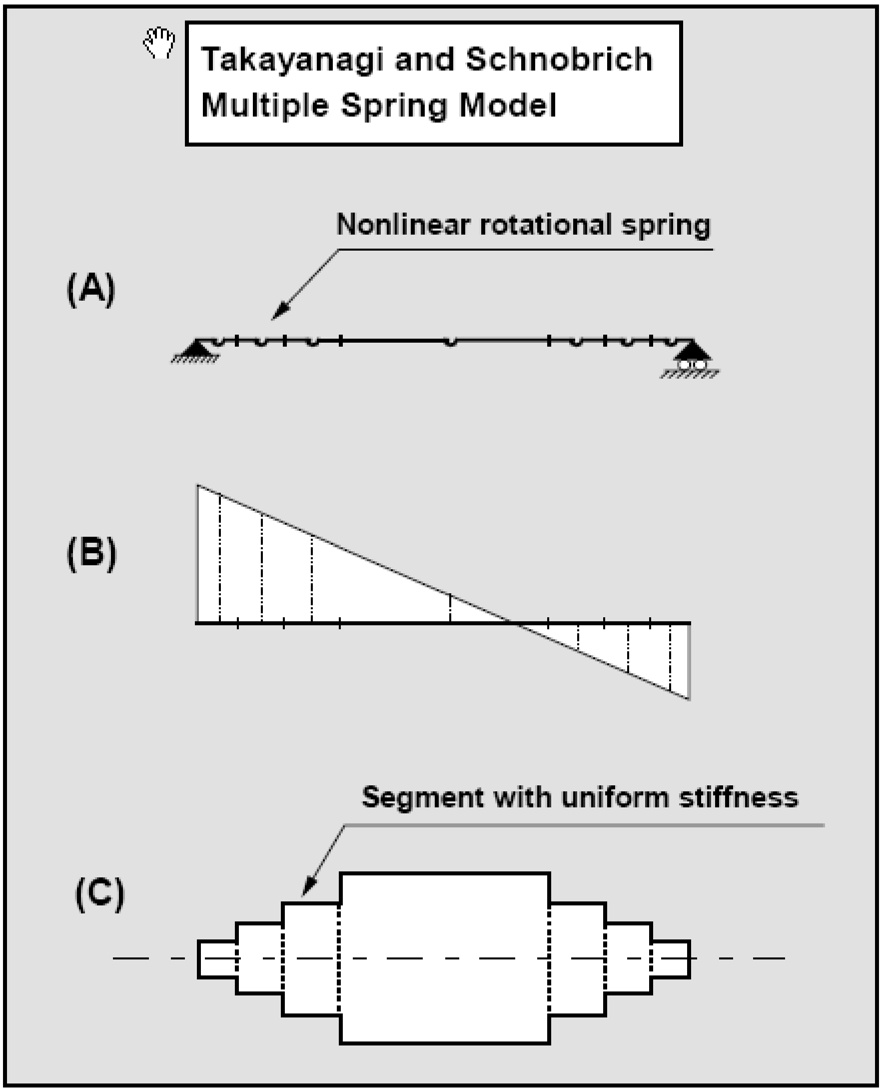


图 1.5 Takayanagi and Schnobrich 多弹簧模型

（A）单元模型

（B）弯矩图

（C）截面刚度分布

最早的分布非线性单元使用 3 次 Hermit 多项式的经典刚度法来估算沿着单元的变形。通常的具有轴向和弯曲自由度的三维单元在图 1.6 的局部参考系统中描述，图 1.7 显示了无刚体位移模式单元。对于所有单元扭转自由度假设为显著的线弹性并且不与轴向和弯曲自由度耦合，这样在接下来的描述中可以忽略。简洁起见，我们只讨论关于 Z 轴的单轴弯曲情况，因为它直接可以延伸到双轴的情况。具有刚体位移模式的单元节点位移用 $\bar{q}$ 表示，无刚体位移模式的单元用 q 表示：

$$\bar{q} = \{\bar{q}_1 \quad \bar{q}_2 \quad \bar{q}_5 \quad \bar{q}_6 \quad \bar{q}_7 \quad \bar{q}_{10}\} \qquad (1.1)$$

$$q = \{q_1 \quad q_2 \quad q_5\}^T \qquad (2.2)$$

如果x表示单元的纵轴，则横向位移$v(x)$和轴向位移$u(x)$可以得出;

$$\bar{\mathrm{d}}(x)=\begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{Bmatrix}=\mathrm{a}_d(x)\square\bar{\mathrm{q}} \qquad (1.3)$$

其中$\mathrm{a}_d(x)$是包含横向位移的 3 次差值函数和轴向位移线性插值函数的矩阵

$$\mathbf{a}_d(x)=\begin{bmatrix} \psi_1(x) & 0 & 0 & \psi_2(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1(x) & \phi_2(x) & 0 & \phi_3(x) & \phi_4(x) \end{bmatrix} \qquad (1.4)$$

with

$$\psi_1(x)=1-\frac{x}{L} \qquad \psi_2(x)=\frac{x}{L}$$

$$\phi_1(x)=2\frac{x^3}{L^3}-3\frac{x^2}{L^2}+1 \qquad \phi_2(x)=\frac{x^3}{L^2}-2\frac{x^2}{L}+x$$

$$\phi_3(x)=-2\frac{x^3}{L^3}+3\frac{x^2}{L^2} \qquad \phi_4(x)=\frac{x^3}{L^2}-\frac{x^2}{L}$$

以上的插值函数可以容易的延伸至双轴弯曲的情况。

通过虚功原理推导梁和梁-柱单元的刚度矩阵中，问题的广义变形是轴向应变$\varepsilon(x)$和关于 z 轴的曲率$\chi_z(x)$。在小变形和平截面假设下，截面变形$d(x)$与节点位移相关：

$$\mathbf{d}(x)=\begin{Bmatrix} \varepsilon(x) \\ \chi_z(x) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} u'(x) \\ v''(x) \end{Bmatrix}=\bar{\mathbf{a}}(x)\cdot\bar{\mathbf{q}} \qquad (1.5)$$

其中$\bar{a}(x)$从位移差值函数依据下式得到：

$$\bar{\mathbf{a}}(x)=\begin{bmatrix} \psi_1'(x) & 0 & 0 & \psi_2'(x) & 0 & 0 \\ 0 & \phi_1''(x) & \phi_2''(x) & 0 & \phi_3''(x) & \phi_4''(x) \end{bmatrix} \qquad (1.6)$$

用虚功原理或最小势能原理刚度阵$\bar{\mathrm{K}}$由截面刚度$k(x)$积分得出：

$$\bar{\mathbf{K}}=\int_0^L \bar{\mathbf{a}}^T(x)\cdot\mathbf{k}(x)\cdot\bar{\mathbf{a}}(x)\cdot dx \qquad (1.7)$$

其中截面刚度$k(x)$与截面力$D(x)$通过相应的变形$d(x)$联系起来：

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{k}(x)\cdot\mathbf{d}(x) \tag{1.8}$$

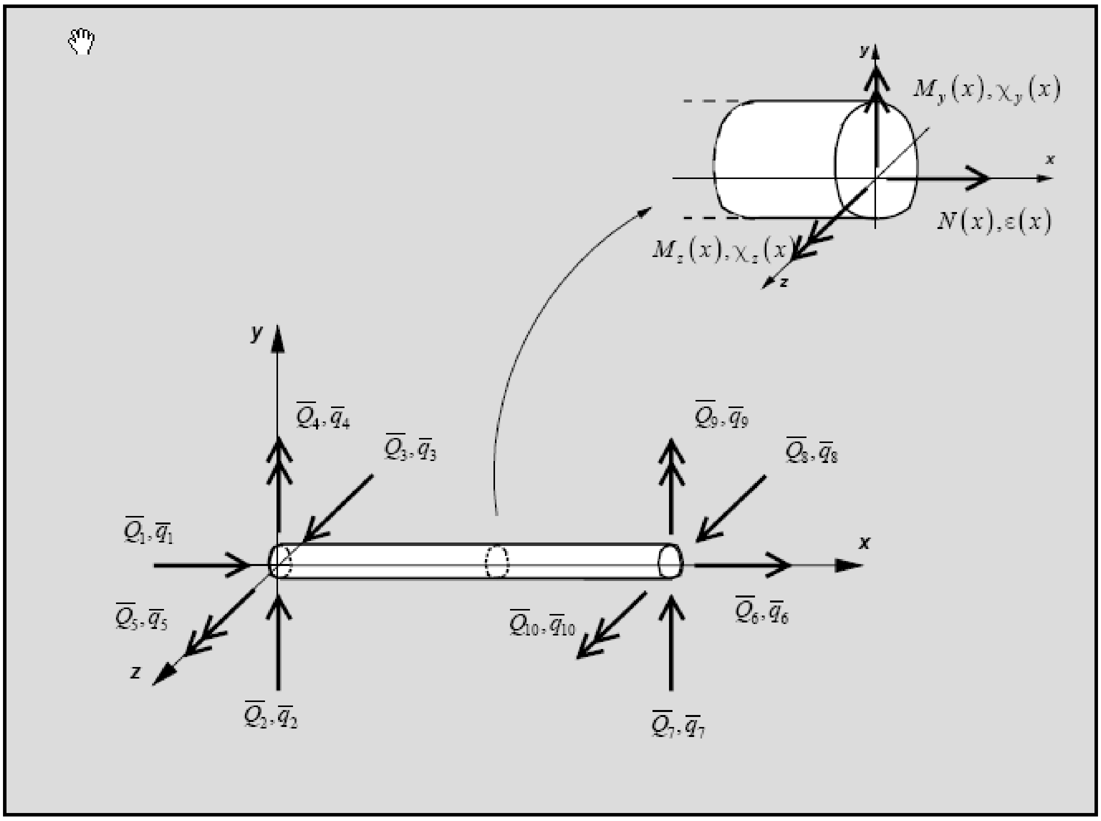


图 1.6 局部参考系中具有刚体位移模式的梁单元

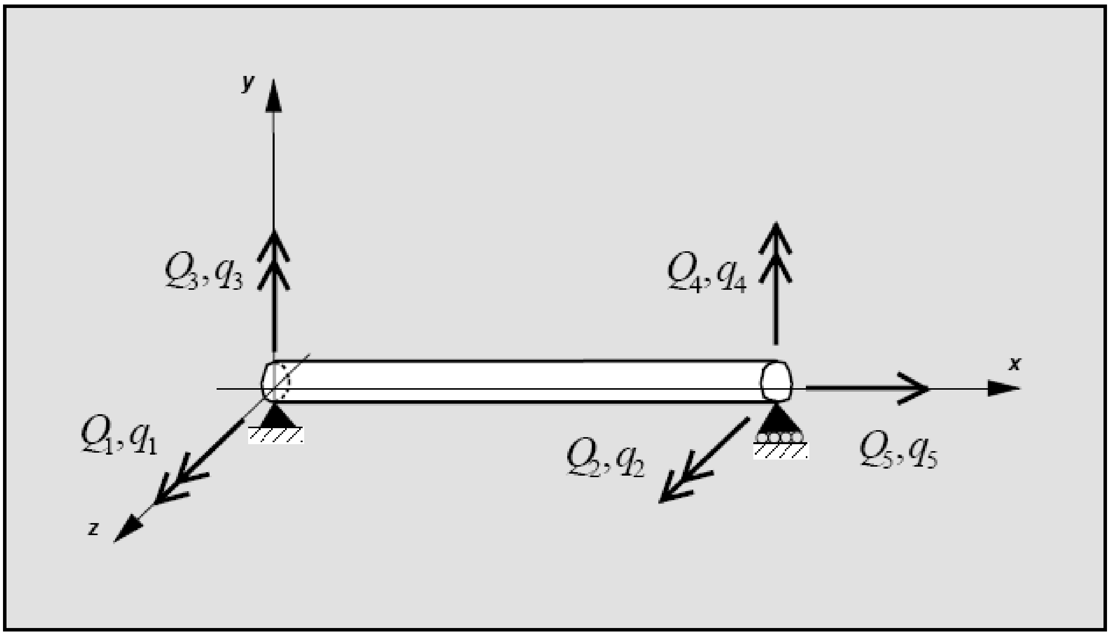


图 1.7 局部参考系中无刚体位移模式的梁单元

截面力是此问题的广义应力，比如，截面 x 的轴力 $N(x)$ 和弯矩 $M_z(x)$。因

此：

$$\mathbf{D}(x) = \begin{Bmatrix} N(x) \\ M_z(x) \end{Bmatrix} \qquad (1.9)$$

用虚功原理也可以积分截面抵抗力 $D_r(x)$ 得出单元抵抗力 $\overline{Q}_r(x)$：

$$\overline{\mathbf{Q}}_R = \int_0^L \overline{\mathbf{a}}^T(x)\cdot\mathbf{D}_R(x)\cdot dx \qquad (1.10)$$

在诸多模型中，Hellesland and Scordelis（1981）and Mari and Scordelis(1984)提出了基于上述经典有限元位移法的单元模型。Bazant and Bhat（1977）通过基于 endochronic 理论的多轴本构原理使列式延伸至包含剪切的影响。在这一模型中，截面被分为水平层，但通过层内正应力和剪力的相互作用推导出每一层允许发生不同角度的裂缝。

基于刚度法的单元模型的主要缺点是不能描述单元接近其极限强度和应变软化开始后的响应，因为它受下述详细讨论的数值不稳定问题的影响。

由于采用 3 次 Hermit 插值函数不能很好的描述端部屈服单元的曲率分布，作为基本未知量截面变形和截面柔度组合估算得出了改进的表示内部变形的计算法。Menegotto and Pinto（1977）基于截面测量得出的值对两者（截面变形和截面柔度）进行插值并包含了轴力弯矩相互作用。截面柔度在所测截面之间被假设为线性变化，等效于刚度双曲变化。这一精确的改进使该方法的计算性具有吸引力，因为只需测量少数截面，因此，对于同等程度的离散，该模型需要计算并存储的变量数就比刚度模型要少。

通过引入不同的变形差值函数，该模型的精度被更深一步的改进。经典位移法的一个主要局限在于假设的 3 次插值函数，会导致单元的线性曲率分布。这一假设在线性或近似线性的响应下可以得出满意的结果，但钢筋混凝土构件端部产生明显的屈服时，曲率的分布在非弹性区域变为显著非线性。这要求基于刚度的单元非弹性区域中使用非常细化的离散。Mahasuverachai（1982）首次提出使用基于柔度的形函数，其随着构件逐渐达到非弹性变形的过程而不断改变。在他的论文中估算变形增量而不是总的变形。截面变形增量记为：

$$\Delta\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot\mathbf{F}^{-1}\cdot\Delta\mathbf{q} = \mathbf{a}(x)\cdot\Delta\mathbf{q} \qquad (1.11)$$

其中 Δ 表示相应向量的增量。然而这一新的列式法却促进了管道单元（pipeline element）的发展，因为其非线性主要由集合性而非材料性质产生。

为研发更加强大和可靠的钢筋混凝土框架单元，最近的研究已经有两种方法并行：第一，偏离最初的经典刚度法，研究者把注意力聚焦在基于柔度的形函数的研究，并且当前基于柔度的列式已能更加精确的描述但愿内部的应力分布。第二，单元被细分为纵向纤维，其有两个固有的优点：a）钢筋混凝土截面是通过纤维的单轴应力应变性能和空间作用推导出的，比如被横向钢筋约束的混凝土

可以归入单轴应力应变关系；b）弯矩和州立的相互作用可以合理的描述。

柔度法基于单元内的应力差值函数，通常来讲，单元的分析并未考虑刚体位移模式。这种情况下旋杆的端部旋转和轴向变形的微分是单元的广义变形，或者简单的说，即使单元的变形。未考虑刚体位移模式的单元力和变形在图 1.7 中显示。在小变形和小位移的假设下，单元变形 q 与单远位移 $\bar{q}$ 在协调矩阵中联系起来。在单轴弯曲情况下未考虑刚体位移模式的单元力向量是：

$$\mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_5\}^T \tag{1.12}$$

通常假设单元内部分布的弯矩是线性的，其轴力分布是不变的。用向量表示记为：

$$\mathbf{D}(x) = \mathbf{b}(x)\cdot\mathbf{Q} \tag{1.13}$$

其中 $b(x)$ 是包含力差值函数的矩阵。

$$\mathbf{b}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \left(\frac{x}{L}-1\right) & \left(\frac{x}{L}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

应用虚功原理可导出单元柔度：

$$\mathbf{F} = \int_0^L \mathbf{b}^T(x)\cdot\mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot dx \tag{1.15}$$

其中 $f(x)$ 是截面柔度阵，比如：

$$\mathbf{d}(x) = \mathbf{f}(x)\cdot\mathbf{D}(x) \tag{1.16}$$

这一列式法的好处可从以下的理解得出，在不考虑单元状态的情况下，只要尚未加载，等式（1.13）和（1.14）严格满足单元的平衡方程。换句话说，不管材料的非线性在截面层面产生或是单元在超过其极限强度时开始发生软化，假设的内力分布都是精确的。

基于柔度法的单元一个关键的问题是对已经存在的有限元程序中进行插值。计算机程序通常以刚度法分析作为基础，这种情况下在指定的荷载下平衡方程整体坐标的解得出未知的结构位移。在单元位移从结构位移中得出之后，才开始进行单元状态分析。在这一过程中，需要在给出的单元为一中决定抵抗力和刚度阵。在基于柔度的单元中，单元状态分析需要特殊的方法，因为单元抵抗力并

不能通过式（1.10）指出的截面抵抗力插值得到。在确定基于柔度的单元状态时 Ciampi and Carlesimo（1986）提出了一个有趣的方法，其模型的截面弯矩-曲率关系基于 endochronic 理论（Brancaleoni 等 1983 提出）。单元状态分析依据由于截面本构关系的数值积分导致的残余变形。后一个模型并未考虑轴力和弯矩的相互作用。

1.2.3 纤维模型

目前钢筋混凝土构件非线性分析最为理想的模型是基于柔度的纤维单元。这一类模型中单元被细分为纵向纤维，如图 1.8 所示。纤维的几何特性即是在局部坐标 y，z 平面的位置和纤维区域 A_{ifib}。截面的本构关系并不特别明显，但可以通过纤维响应的积分推导出来，纤维的响应满足特定材料的单轴应力应变关系，如图 1.8 所示。The elements proposed to date 限制在小位移和变形并有平截面假设。

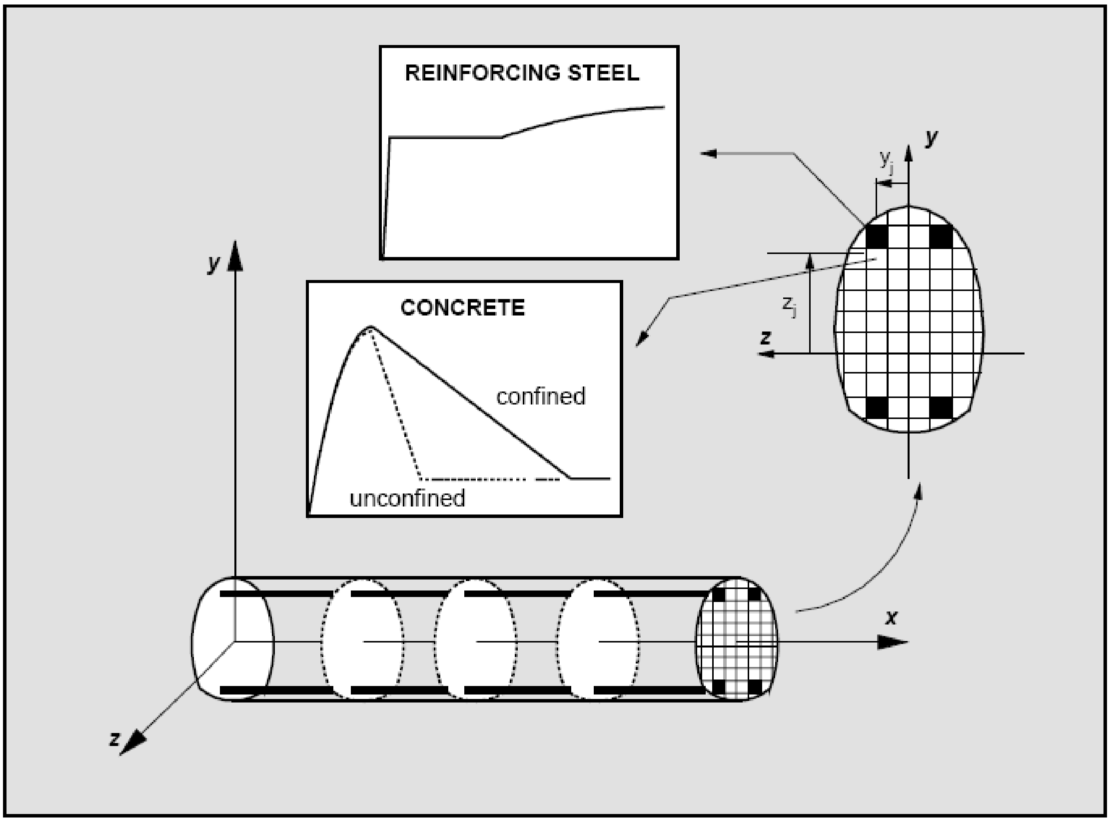


图 1.8 纤维单元：控制截面的分布和截面被划分为纤维

在基于柔度的纤维单元列式中出现两个新的问题：a）单元状态的确定，牵涉到给定单元位移下抵抗力的确定，b）截面柔度 $f(x)$ 的确定，在依据式（1.15）计算单元柔度 F 是需要用到。

基于柔度的模型的基本假设是，式（1.13）通过差值函数 $b(x)$ 表示的单元内力分布。在一贯的判断状态的方法中，截面力由式（1.13）的单元力来决定，再通过平衡关系计算相应的纤维应力。纤维应变和柔度从纤维应力应变关系和截

面变形计算，而截面柔度通过虚力原理计算。但是，如果截面有多个纤维。从截面力推导纤维应力则是静不定问题：纤维应力不能由截面的轴力和弯矩完全确定，因为单轴情况下只能提供两个平衡方程却有 3 个或更多的未知应力。一个可能的解决办法是假设截面的应力分布情况，但问题是，这只能在知道纤维状态之后做出假设，因为纤维应力应变关系通常由应变显函数表达。模型采用的解决办法是使截面本构关系线性化，然后通过新的截面力结算截面变形，并得出截面柔度。纤维应力和刚度通过纤维应力应变关系得出。截面抵抗力由纤维应力分布计算，截面刚度 $k(x)$ 由纤维刚度组装得出。单轴弯曲下 $k(x)$ 如下表：

$$\mathbf{k}(x)=\begin{bmatrix}\sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}\cdot A_{ifib} & -\sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib} \\ -\sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}^2\end{bmatrix} \tag{1.17}$$

截面刚度反过来可以得出截面柔度 $\mathrm{f}(x)=\mathrm{k}^{-1}(x)$ 。新的单元柔度 F 由式（1.15）计算，反过来可以得到单元刚度 $\mathrm{K}=\mathrm{F}^{-1}$ 。余下的问题是从沿单元长度的截面抵抗力来确定单元的抵抗力。目前，这事基于柔度的纤维单元发展所遇到的主要问题。

基于柔度的纤维模型首先由 Kaba and Mahin（1984）提出，它遵循上述柔度法的纲要，单元的柔度矩阵使用式（1.14）中的力插值函数 $b(x)$ 求得。这一模型仅考虑单轴受弯。在分线性分析的状态确定阶段，通过式（1.11）中基于柔度的变形的形函数，截面的变形由单元变形计算得出。由于截面的非线性响应，$f(x), F$ 以及随之产生的 $a(x)$ 随单元变形时程也发生变化。在平截面假定下，用截面变形来确定纤维应变，相应的纤维应力和刚度可以通过纤维应力应变关系得出。之后的截面刚度 $k(x)$ 和相应抵抗力 $D_R(x)$ 通过截面虚功原理确定。截面刚度反过来可以得出截面柔度 $f(x)$ 。最终，式（1.15）得出了单元柔度矩阵 F ，单元抵抗力增量 $\Delta Q_R(x)$ 用虚功原理得出：

$$\Delta\mathbf{Q}_R = \int_0^L \mathbf{a}^T(x)\cdot\Delta\mathbf{D}_R(x)\cdot dx = \mathbf{F}^{-1}\cdot\int_0^L \mathbf{b}^T(x)\cdot\mathbf{f}(x)\cdot\Delta\mathbf{D}_R(x)\cdot dx \tag{1.18}$$

在单元长度的积分是因为单元在纵向被细分为等距的小段，并假设每一小段内柔度线性分布。这一模型可以得出很好的结果，但受收敛性的影响，并且不能描述单元的软化。实际的单元列式采用混合法，因为它同时使用了变形和力的插值函数。很不幸的，该单元缺乏理论证实并包含一些引起数值问题的矛盾。第一个矛盾出现在的单元柔度的确定中，这里考虑协调性并采用虚力原理，而单元

抵抗力的确定却考虑平衡和虚位移原理。第二个矛盾是，在状态确定过程中违背的单元内的平衡，因为截面抵抗力 $D_R(x)$ 的分布并不满足式（1.13）的平衡条件。于是，得出的弯矩分布并非线性，轴力分布也不均匀，违背了力插值函数 $b(x)$ 的要求。

Zeris and Mahin（1988 and 1991）讨论了原始 Kaba-Mahin 模型的改进，并延伸其包含了双轴受弯的情况。这一改进主要关注单元状态的确定。一旦主程序得出了节点位移增量 $\Delta\bar{\mathrm{q}}$，单元更新结果由以下几步组成：a）在单元端截面采用式（1.11）来确定截面变形增量 $\Delta\mathrm{d}(0)$ 和 $\Delta\mathrm{d}(L)$；b）端部截面相应的弯矩和轴力由 Zeris（1986）提出的修正的时时更新法（event-to-event advancement method）；c）单元内部截面的变形通过重复的方法以得到与单元假设的应力分布相一致的截面抵抗力。

如图 1.9 所示，Zeris and Mahin（1988）讨论了悬臂梁软化响应的一个有意思的分析。当悬臂梁位移超过其界限抵抗位移时，悬臂梁的固端 1 截面失去承载能力，并开始发生软化（进入苏塑性）。沿着悬臂梁高的 2-5 截面依次卸载，以满足内力平衡。基于刚度的单元不能真实的描述单元的响应，是由于线性曲率分布的假设。单元软化过程中，假设的曲率分布同实际的分布相异甚远，如图 1.9 所示，真实的分布在固端附近产生急剧的变化。此情况下柱子必须被细分为多个单元，但仍会面临收敛性的问题。早期的柔度单元，比如 Kaba and Mahin 描述的单元，同样不能正确的反应构建的软化效应，因为其并未要求单元的平衡。

虽然 Zeris and Mahin 提出的单元有出色的效果，但单元状态确定的过程并不清晰，并且是由修正的 Kaba-Mahin 模型而不是普通的理论推导出。

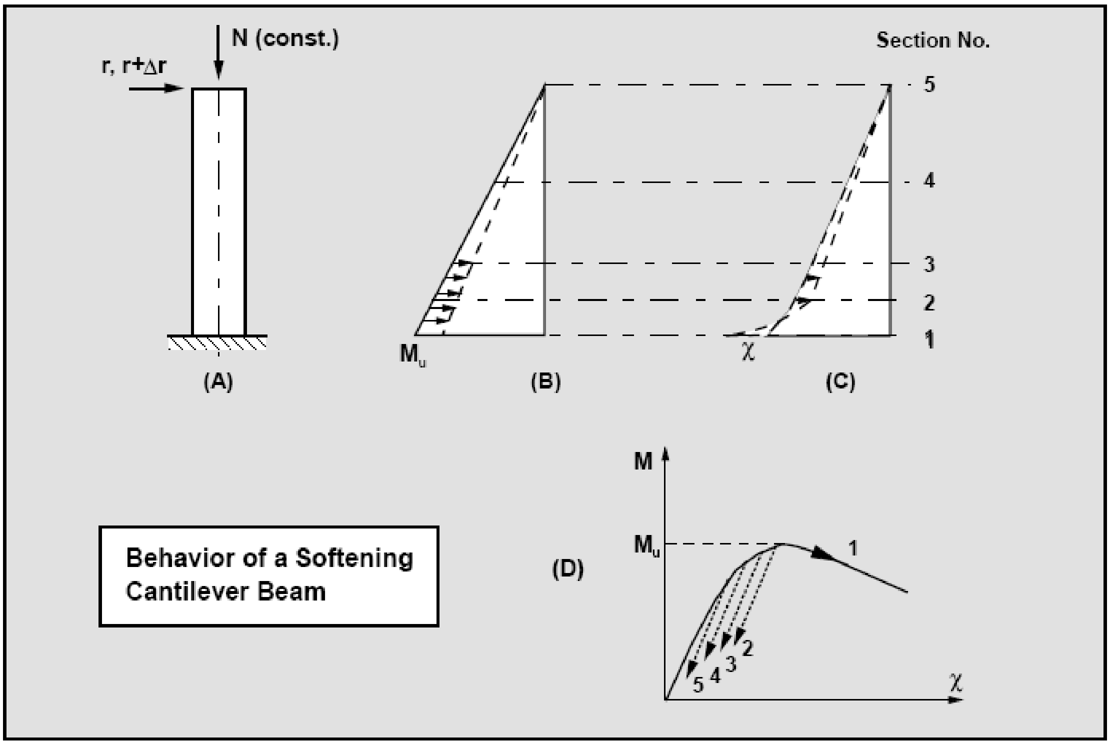


图 1.9 软化悬臂梁模型的响应

（A）构件和荷载;(B)弯矩分布；（C）曲率分布；（D）弯矩-曲率关系

1.3 目标和范围

文献调查中特别关注了纤维梁-柱单元是因为它有把相对准确的截面响应描述和简单的框架单元结合在一起的能力。纤维的单轴材料性能也包含了三维的效果，比如被纵筋和箍筋约束的混凝土。弯矩和轴力的相互作用可以通过对纤维单轴性质性能的积分得到。由于计算的复杂性，在抗震设计分析中一般忽略这一作用。但最近的地震和研究表明，弯矩轴力的相互作用对钢筋混凝土构建的滞回性能有影响，特别是对于框架角柱和双肢剪力墙体系的细墙。对于可能有较大局部损伤或部分失去承载能力的钢筋混凝土结构的非线性动力分析中，Fiber models proposed to date 并不能提供一个清晰明了而又可靠的非线性算法。

当前的研究提出了一个新的纤维梁-柱有限元，其一直的非线性求解算法特别设和软化单元的高度非线性滞回性能的研究，比如钢筋混凝土柱受时变轴向荷载。单元的列式属于混合法的范畴，但也同样能由柔度法得出，确定单元的状态使用非线性迭代算法，该算法在单元内满足平衡和协调，并最终收敛到一个满足特定极限的截面本构关系的状态。

这一研究的主要目的：

- 对梁-柱单元的列式提出一个正式的混合法，使用力差值函数和依据柔度变形的型函数；
- 对基于柔度的梁-柱单元提出一个创新和数值稳定的状态确定方法。该算法从给出的单元内满足平衡和协调的单元列式使用迭代法来计算抵抗力。虽然该方法在纤维梁-柱模型中被讨论到，它仍能应用在截面的任意非线性本构关系中。
- 在多功能分析程序中，讨论单元插值的重要数值问题，着重研究与决定单元状态的方法的插值问题相关的方面。
- 使单元列式包含单元荷载。这一非常重要的问题目前在钢筋混凝土抗震研究中还缺乏关注。它与提出的预应力混凝土结构模型密切相关。
- 用一系列例子来阐述所提出的模型对钢筋混凝土构件的滞回性能的描述能力。响应对单元内控制界面的数量的敏感性和选择的强度对结构精确性的影响，通过一些参数的研究加以讨论。

这一章回顾了以前相关的研究，第二章将介绍梁-柱单元的混合列式法，并阐述提出的确定单元状态的非线性求解算；第三章延伸至纤维梁-柱单元的列式，并讨论纤维非线性应力应变关系的材料模型；第四章讨论对有关于非线性求解算法的数值插值的问题以及相关的收敛标准，还讨论了在基于柔度的有限元中采用单元荷载的一贯方法。在第五章开头，反应对单元内控制截面数量的敏感性和选择的强度对结构精确性的影响通过一些参数的研究进行谈论。提出的模型的有效性用对比分析结果和实验结果来确定。第六章提出本文的结论和未来研究的方向。

第二章　　梁-柱单元的列式

2.1 概述

本章陈述了基于柔度法的梁-柱有限元的常规列式。使用混合法的更加常规的陈述有两个原因：(a)此方法能更好的阐述非线性分析算法中的状态确定过程，（b）此法可以直接得出单元基于柔度的变形形函数，使得常规的混合法简化为本文采用的柔度法。另外，混合法的通用性使得今后替代变形形函数的研究称为可能。

为保证陈述的通常性，力-变形关系在截面层次上并未特殊化。特殊化将在下一章讨论，届时截面的力-变形关系通过正截面的纤维离散化得出。Spacone 等（1992）采用了一个不同的使用经典塑性理论的方法来推导出截面力-变形关系的滞回模型。

我们提出的梁-柱单元在荷载时程中满足小变形和平截面假设。单元的列式有混合法得出：单元内的应力分布使用满足平衡的插值函数是列式的基本出发点。在混合法的概念中，可以看出单元变形场中对基于柔度的型函数的选择可以使得最后的方程得到很大的简化。通过这一特殊的变形形函数的选择，常规的混合法可以简化为柔度法的特殊情况。但混合法列式在理解确定单元状态所提出的方法时仍旧十分有用。

我们提出的列式法相比以前的模型有一下这些优点：

- 单元满足平衡和协调：通过力插值函数的选择使得满足平衡，而通过对截面变形的积分来得到相应单元的变形和位移，从而满足协调。用迭代法来满足在特定强度下截面力-变形的非线性关系。
- 钢筋混凝土构件的软化效应，比如配筋不够或是轴力太大所引起的，数值计算上并不会遇见困难。

本章的第一部分，在定义完广义单元力和对应的单元变形后，陈述了混合法列式。第二部分着重塔伦了但愿状态确定过程和制定单元变形下单元抵抗力的逐步计算法。这些推到均不需要特别的截面模型。特别的模型将在第三章讨论，届时专门讨论纤维截面模型的非线性过程。

2.2 广义力和广义位移的定义

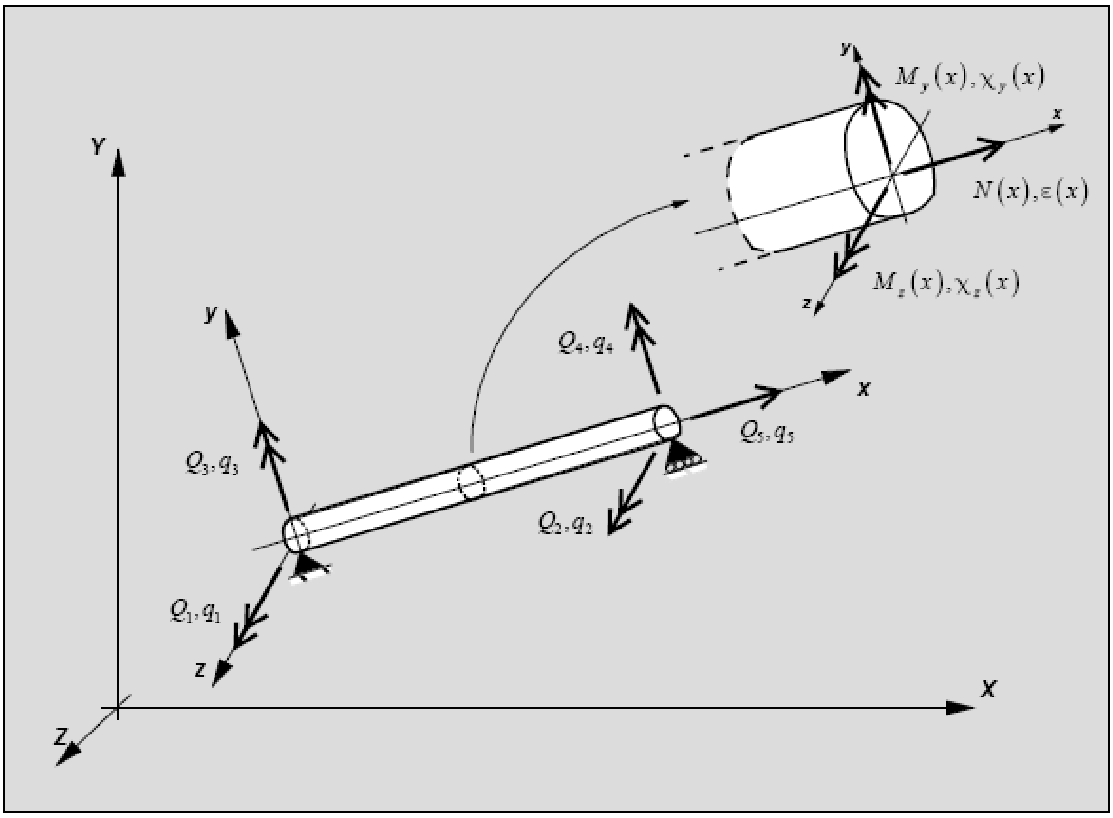


图 2.1 单元和截面层面的广义力和广义位移

图 2.1 描述了梁-柱有限元。参考坐标为单元的局部坐标系 xyz，其中 XYZ 表示整体坐标系。纵坐标 x 是各个截面形心的集合。接下来是力、位移和变形的标注：力有大写字母表示而对应的变形或位移用同样的小写字母表示。细的字母代表量的值，而粗体字母代表向量或矩阵。

图 2.1 显示了单元对应变形时的力，并未包含刚体位移模式。因为列式基于几何线性，所以刚体位移模式可以用简单的几何变化得到。单元有 5 个自由度：一个轴向拉伸—— q_5，每个端部节点的对用于轴的两个旋转自由度，$(q_{1,}q_3)\text{and}(q_2,q_4)$。为清晰明了，接下来的讨论称它们为广义变形，或者单元变形。Q_1 至 Q_5 表示对应的广义力：一个轴力—— Q_5，每个节点的两个弯矩 Q_1，Q_3 和，Q_2 Q_4。端部旋转和对应的弯矩在两个任意、正交的 yz 轴上。单元的广义力和变形用下面的向量表示：

单 元 力 向 量 $$Q=\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{Bmatrix} \qquad (2.1)$$

单 元 变 形 向 量 $$q=\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} \qquad (2.2)$$

图 2.1 还显示了单元某个截面的广义力和变形。接卖弄变形通过 3 个合应变表示：单元纵轴向的轴应变$\varepsilon(\mathrm{x})$和两个关于两个任意正交的 zy 轴的曲率$\chi_z(x)$和$\chi_y(x)$。对用的合力为轴力$N(x)$和两个弯矩$M_z(x)$和$M_y(x)$。截面广义力和位移用下面的向量表示：

Section force vector $$\mathbf{D}(x)=\begin{Bmatrix} M_z(x) \\ M_y(x) \\ N(x) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} D_1(x) \\ D_2(x) \\ D_3(x) \end{Bmatrix} \qquad (2.3)$$

Section deformation vector $$\mathbf{d}(x)=\begin{Bmatrix} \chi_z(x) \\ \chi_y(x) \\ \varepsilon(x) \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} d_1(x) \\ d_2(x) \\ d_3(x) \end{Bmatrix} \qquad (2.4)$$

单元的列式可以容易的延伸至包含扭转自由度的情况，只要扭转自由度不与目前这几个自由度耦合，并且属于线弹性的范围。当前的研究重点是图 2.1 中所示的单元，其描述了双轴弯曲或轴力的任意往复荷载时程下框架单元的非线性响应。

2.3 梁-柱单元列式

接下来使用混合有限元法对梁-柱单元进行列式。这一部并未考虑任何特殊的插值函数。上面已经讨论过了，因为选择了基于柔度的变形形函数，混合法就简化为柔度法。截面力-变形的非线性关系仍旧适用。下一章讨论在梁-柱单元正截面的纤维离散时，力插值函数和截面力-变形关系被特殊化。

为推导出但愿广义力和对应变形的矩阵关系，列式中用到的混合法使用了平衡和截面力-变形关系的积分形式。为保持线性关系，截面力-变形关系在每一时刻被线性化，而用迭代算法来满足制定强度下截面力-变形的非线性关系。

双场混合法（Zienkiewicz and Taylor1989）中，试用了独立的型函数来近似单元的力场和变形场。用Δ表示相应值的增量，两个场量记为：

$$\Delta\mathbf{d}^i(x)=\mathbf{a}(x)\cdot\Delta\mathbf{q}^i \tag{2.5}$$

$$\mathbf{D}^i(x)=\mathbf{b}(x)\cdot\mathbf{Q}^i \qquad \text{and} \qquad \Delta\mathbf{D}^i(x)=\mathbf{b}(x)\cdot\Delta\mathbf{Q}^i \tag{2.6}$$

矩阵 $a(x)$ 和 $b(x)$ 是变形和力的插值矩阵。上标 i 表示 Newton-Raphson 迭代的次数，当施加的荷载和内力满足平衡后才开始在结构自由度上迭代。有必要在单元列式中使用上标，是由于变形插值函数的特殊形式——插值函数基于柔度。

在混合法列式中先用到了平衡和截面力-变形关系的积分形式。把它们组合起来可以得出单元力和变形增量之间的特殊关系。

线性化截面力-变形关系的加权积分形式为：

$$\int_0^L \delta\mathbf{D}^T(x)\cdot\left[\Delta\mathbf{d}^i(x)-\mathbf{f}^{i-1}(x)\cdot\Delta\mathbf{D}^i(x)\right]dx=0 \tag{2.7}$$

Zienkiewicz and Taylor（1989）讨论的截面力-变形关系出现在柔度形式中

$$\Delta\mathbf{d}^i(x)=\mathbf{f}^{i-1}(x)\cdot\Delta\mathbf{D}^i(x)$$

所以得出的柔度阵是对阵的。上标 i-1 表示 Newton-Raphson 迭代的第 i 步使用了前一步迭代得出的截面柔度。把（2.5）和（2.6）带入（2.7）中得出：

$$\delta\mathbf{Q}^T\cdot\int_0^L \mathbf{b}^T(x)\cdot\left[\mathbf{a}(x)\cdot\Delta\mathbf{q}^i-\mathbf{f}^{i-1}(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot\Delta\mathbf{Q}^i\right]dx=0 \tag{2.8}$$

由于式（2.8）对任意 δQ^T 成立，所以

$$\left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x)\cdot\mathbf{a}(x)\cdot dx\right]\cdot\Delta\mathbf{q}^i-\left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x)\cdot\mathbf{f}^{i-1}(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot dx\right]\cdot\Delta\mathbf{Q}^i=\mathbf{0} \tag{2.9}$$

用方括号表示一下矩阵：

$$\mathbf{F}^{i-1}=\left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x)\cdot\mathbf{f}^{i-1}(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot dx\right] \tag{2.10}$$

$$\mathbf{T}=\left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x)\cdot\mathbf{a}(x)\cdot dx\right] \tag{2.11}$$

其中 **F** 是单元柔度阵，**T** 是与插值函数矩阵相关的一个矩阵。用式（2.10）

和（2.11），式（2.9）可以写作：

$$\mathbf{T}\cdot\Delta\mathbf{q}^{i}-\mathbf{F}^{i-1}\cdot\Delta\mathbf{Q}^{i}=\mathbf{0} \tag{2.12}$$

或等效的

$$\mathbf{T}\cdot\Delta\mathbf{q}^{i}=\mathbf{F}^{i-1}\cdot\Delta\mathbf{Q}^{i} \tag{2.13}$$

这事显性化截面力-变形关系插值形式的矩阵表示法。

下一步中两单元的平衡是满足的。在经典的双场混合法中，平衡方程的积分形式通过虚位移原理得到：

$$\int_0^L \delta\mathbf{d}^T(x)\cdot\left[\mathbf{D}^{i-1}(x)+\Delta\mathbf{D}^{i}(x)\right]\cdot dx=\delta\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{P}^{i} \tag{2.14}$$

其中 P^i 是施加的与内力 $D^{i-1}(x)+\Delta D^{i}(x)$ 平衡的荷载向量。式（2.5）和（2.6）带入（2.14）得出：

$$\delta\mathbf{q}^T\cdot\left[\int_0^L \mathbf{a}^T(x)\cdot\left[\mathbf{b}(x)\cdot\mathbf{Q}^{i-1}+\mathbf{b}(x)\cdot\Delta\mathbf{Q}^{i}\right]\cdot dx\right]=\delta\mathbf{q}^T\cdot\mathbf{P}^{i} \tag{2.15}$$

观察式（2.15）对任意的 $\delta\mathrm{q}^T$ 成立，所以

$$\left[\int_0^L \mathbf{a}^T(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot dx\right]\cdot\mathbf{Q}^{i-1}+\left[\int_0^L \mathbf{a}^T(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot dx\right]\cdot\Delta\mathbf{Q}^{i}=\mathbf{P}^{i} \tag{2.16}$$

如果用了式（2.11）介绍的表示法，式（2.16）可写为矩阵型式

$$\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{Q}^{i-1}+\mathbf{T}^T\cdot\Delta\mathbf{Q}^{i}=\mathbf{P}^{i} \tag{2.17}$$

这就是单元平衡方程的积分形式。从新排列和组合是（2.12）和（2.17）得出

$$\begin{bmatrix}-\mathbf{F}^{i-1} & \mathbf{T}\\ \mathbf{T}^T & \mathbf{0}\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\Delta\mathbf{Q}^{i}\\ \Delta\mathbf{q}^{i}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{P}^{i}-\mathbf{T}^T\cdot\mathbf{Q}^{i-1}\end{Bmatrix} \tag{2.18}$$

如果式（2.18）的第一个等式求出了 $\Delta\mathrm{Q}^i$，带入第二式得到：

$$\mathbf{T}^T \cdot \left[\mathbf{F}^{i-1}\right]^{-1} \cdot \mathbf{T} \cdot \Delta\mathbf{q}^i = \mathbf{P}^i - \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{Q}^{i-1} \tag{2.19}$$

至今为止，并未强调力和变形形函数 $b(x)$ 和 $a(x)$ 的特殊选择。为使列式保持一般性，下一章再讨论特殊情况的力插值函数 $b(x)$。尽管混合有限元法中变形插值函数 $a(x)$ 与 $b(x)$ 完全相独立，式（2.11）说明特定的变形形函数 $a(x)$ 仍旧可以得出相当的简化。为使得列式简化，如下式 $a(x)$ 选用基于柔度的型函数：

$$\mathbf{a}(x) = \mathbf{f}^{i-1}(x) \cdot \mathbf{b}(x) \cdot \left[\mathbf{F}^{i-1}\right]^{-1} \tag{2.20}$$

这些插值函数使得截面变形与响应的单元变形相关联：

$$\Delta\mathbf{d}^i(x) = \mathbf{f}^{i-1}(x) \cdot \mathbf{b}(x) \cdot \left[\mathbf{F}^{i-1}\right]^{-1} \cdot \Delta\mathbf{q}^i \tag{2.21}$$

F^{i-1} 是前一步 Newton-Raphson 迭代的正切单元柔度矩阵。变形形函数的特定选择使得是（2.11）中的矩阵 T 减缩为 3*3 的方阵 I。可以用是（2.20）带入是（2.11）得证：

$$\mathbf{T} = \left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{a}(x) \cdot dx\right] = \left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}^{i-1}(x) \cdot \mathbf{b}(x) \cdot dx\right] \cdot \left[\mathbf{F}^{i-1}\right]^{-1} = \mathbf{I} \tag{2.22}$$

通过这一变形形函数 $a(x)$ 的选择，是（2.19）变成

$$\left[\mathbf{F}^{i-1}\right]^{-1} \cdot \Delta\mathbf{q}^i = \mathbf{P} - \mathbf{Q}^{i-1} \tag{2.23}$$

同时这一选择使得一般的混合法减缩为柔度法。最终的矩阵方程式（2.23），在单元层面表述了施加的非平衡力 $P - Q^{i-1}$ 和相应变形增量 Δq^i 之间的线性化关系。单元刚度阵记作 $\left[F\right]^{-1}$，以示由单元柔度阵的逆得来。式（2.23）的线性方程组同经典刚度法得出的方程组在两个方面不同：（a）柔度法中单元刚度阵是有单元柔度阵的逆得来，（b）非线性分析中的状态确定过程是不同的，接下来会详细描述。

虽然经典柔度法也能得出式（2.23）相同的线性方程组，以上的推导采用双场混合法是由于以下原因：（a）混合法列式直接得出式（2.20）中基于柔度的变形形函数 $a(x)$ 的具体形式，（b）它显示状态确定过程使用一致的插值，（c）它

在未来的研究中更有空间进行变形形函数的改进。

由于 $a(x)$ 与 $b(x)$ 并不相互独立，并随迭代过程而改变，如是（2.20）所示，我们提出的方法与经典柔度法相关。另外，这一方法在截面本构关系为理想线性时简化为刚度法。换而言之，两个场的非独立性并非是定义型函数时的固有性质，但从截面力-变形关系的材料非线性中可以推导出来。

2.4 状态确定

当前大多数关于钢筋混凝土框架结构分析的研究是以刚度法推导出的有限元模型作为基础的。近来的研究高度关注了基于柔度模型（Zeris and Mahin1988）的优点，但仍不能给出一个简洁而又一致的给定单元变形下确定抵抗力的计算方法。这一问题是在用虚功原理对有限元进行列式时出现的。当单元基于柔度时，计算机程序的内核仍旧是直接刚度法的分析。这种情况下整体平衡方程的解得出的是结构自由度的位移。在状态确定过程中，结构内所有的单元都要进行一一确定。因为基于柔度的单元中，并没有与单元内的变形场和端部位移（或单元变形）相关的变形型函数存在，所以这一过程（指前述的一一确定过程）并不直接，并且目前在基于柔度的单元中并没有很好的发展。这一现实以在之前模型的数值插值中引起混乱。本为对一致的状态确定过程的描述得益于双场混合法基本方程的推导。

结构非线性分析程序中，每一步的荷载对应于结构外力施加的荷载增量。可以求出对应的结构位移增量并得出每个单元的单元变形。在给定单元变形下求抵抗力的过程，称之为状态确定。状态确定过程由相互嵌套的两步组成：a）单元状态确定，即给定端部变形下确定单元抵抗力；b）结构状态确定，即综合单元抵抗力成一个结构抵抗力向量。然后比较抵抗力和施加的总荷载，如果有差别，则在迭代计算过程中将其差值施加在结构上，直到外荷载和抵抗力之差小于允许值。

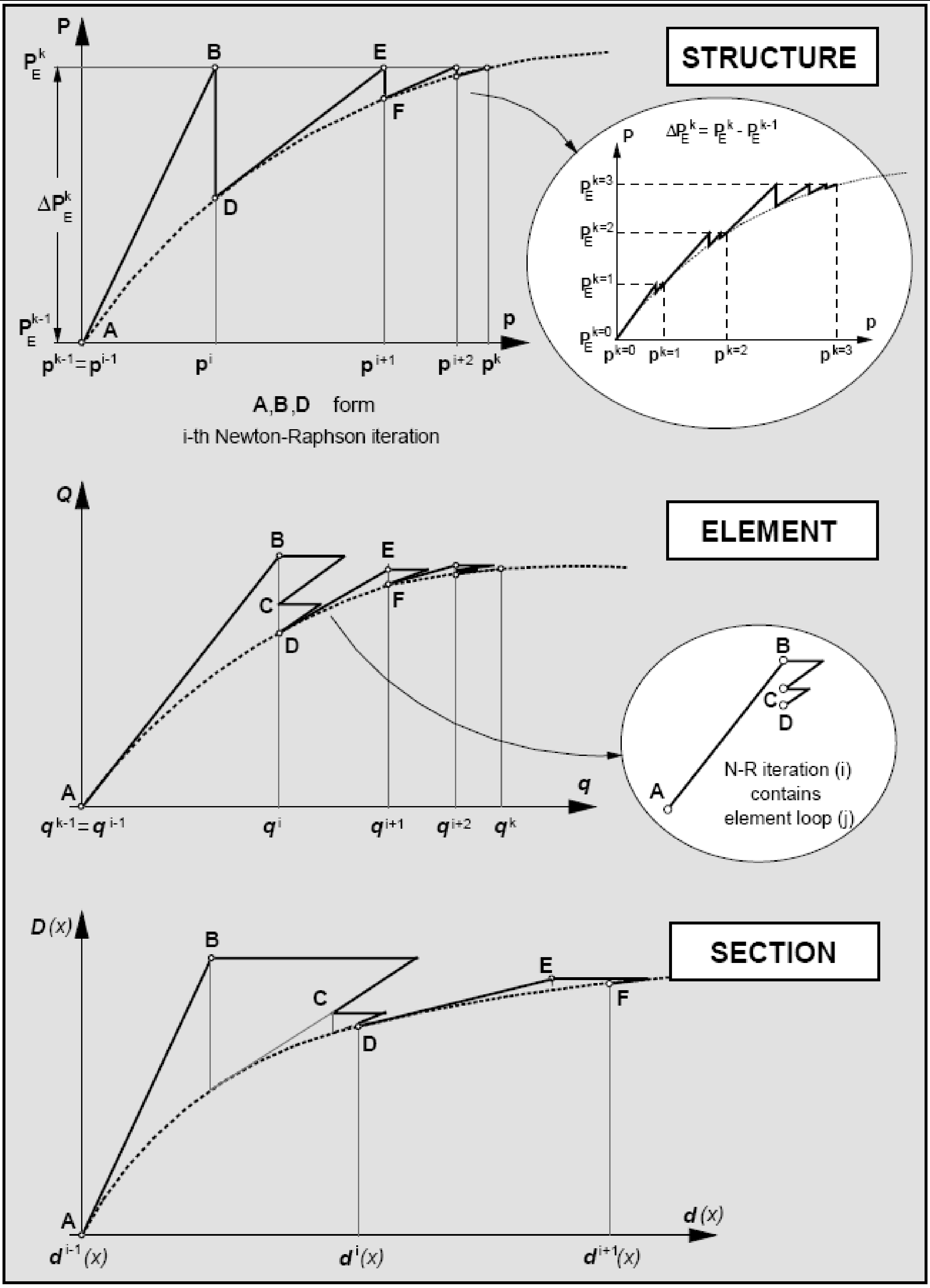


图 2.2　结构、单元和截面层次的状态确定图示：k 表示荷载步次，i 表示结构 Newton-Raphson 迭代，j 表示单元状态确定的迭代。

当前的研究中非线性算法由三个明显嵌套的过程组成，如图 2.2。由角标 k 和 i 表示的两个最外面（outmost process）的过程涉及结构自由度和对应的经典非线性分析法。由角标 j 表示的最里边的过程应用在每个单元内和对应的单元状

态去定中。图 2.2 表示了结构、单元、截面状态在同一个荷载增量 ΔP_E^k 下的发展，其中使用了多次 Newton-Raphson 迭代 i。

总上述，以下定义对嵌套迭代的描述：

k　表示施加荷载的第 k 步。外荷载通过一系列荷载增量 ΔP_E^k 施加。第 k 步时总外荷载是 $P_E^k = P_E^{k-1} + \Delta P_E^k$，其中 k=1，2.….n，$P_E^0 = 0$；

i　表示结构层面的 Newton-Raphson 迭代，比如结构状态确定过程。这一迭代循环得出了对应荷载 P_E^k 下的结构位移 p^k；

j　表示单元层面的迭代，比如单元状态确定过程。在第 i 步 Newton-Raphson 迭代中，求对应于单元变形 q^i 的单元抵抗力时，这一迭代循环是必要的。

在非线性分析程序中由下标 k 和 i 表示的过程很常见，不做更多的讨论。另外，由 j 表示的迭代过程对于本为讨论的梁-柱单元列式来说很重要，所以会详细介绍。应指出任何合适的非线性求解算法均可以使用在 i 表示的迭代过程。本文中试用了 Newton-Raphson。对于 i 迭代循环这一方法的选取并不影响 j 迭代循环，其目的是为确定给定单元变形下的单元抵抗力。

基于刚度法分析的有限元中，截面变形值由变形插值函数对单元端部变形插值得到。对应的截面抵抗力由截面力-变形关系得出。截面抵抗力在单元长度上的权重界分得到单元抵抗力并完成单元状态确定的过程。

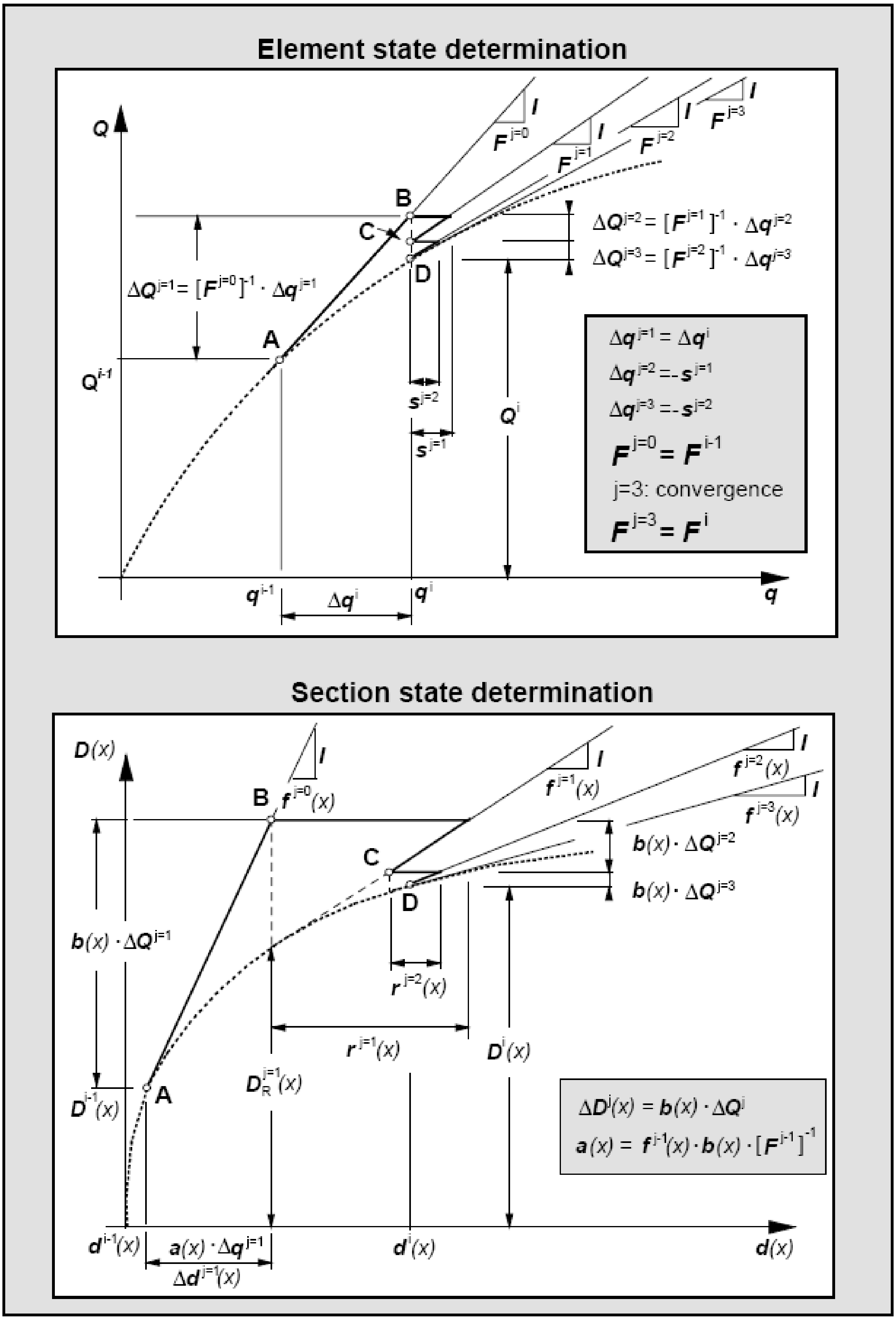


图 2.3 基于柔度单元的单元和截面状态确定：估算单元变形 q^i 的单元抵抗力 Q^i

基于柔度的有限元中，第一步是使用上一步迭代最后的刚度阵确定当前单元变形的单元抵抗力。力插值函数得出沿单元长度分布的力。第一个问题是从给定截面力确定截面变形，因为非线性的截面力-变形关系通常由截面变形的显函数表示。截面变化的刚度阵产生了一个新的单元刚度阵，反过来改变了给定单元变形下的单元力，这事第二个问题。

当前的研究采用一个特殊的非线性解法来解决这些问题。该法每次迭代均求出残余单元变形。结构层面的变形协调要求修正这些残余变形，这通过在单元层面上采用修正基于当前刚度阵的单元力完成。对应的截面力由力插值函数得出，因此单元通长均能保持平衡。在截面状态确定过程中这些截面力保持不变，以保证单元的平衡。相应的，对于当前状态下截面力-变形关系的线性估计会得出残余截面变形。然后在单元长度上对残量进行积分，又得到新的单元残余变形，重复该步骤，直至收敛。应着重指出的是，在该过程中，沿单元通长的单元变形协调和平衡均一直满足。

在图 2.3 中显示了单元状态确定的非线性求解过程的第 i 步 Newton-Raphson 迭代。图 2.3 中，j 循环的收敛通过三次迭代得到。图 2.2 和 2.3 中相同的记号即下标的罗马字母，强调了结构、单元和截面相应状态的关系。

在第 i 步 Newton-Raphson 迭代中，有必要计算当前单元变形下的单元抵抗力：

$$\mathbf{q}^{i} = \mathbf{q}^{i-1} + \Delta\mathbf{q}^{i}$$

最后，在第 i 步 Newton-Raphson 迭代中引入由 j 表示的迭代过程。j=1 为第一次迭代。单元的初始状态，如图 2.3 的 A 点和 j=0 所示，对应于（i-1）步 Newton-Raphson 迭代中 j 循环的最后一次迭代的结果。单元的初始正切刚度阵：

$$\left[\mathbf{F}^{j=0}\right]^{-1} = \left[\mathbf{F}^{i-1}\right]^{-1}$$

已知的单元变形增量：

$$\Delta\mathbf{q}^{j=1} = \Delta\mathbf{q}^{i}$$

对应的单元力增量为：

$$\Delta\mathbf{Q}^{j=1} = \left[\mathbf{F}^{j=0}\right]^{-1} \cdot \Delta\mathbf{q}^{j=1}$$

截面力增量可以通过力插值函数得出：

$$\Delta\mathbf{D}^{j=1}(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \Delta\mathbf{Q}^{j=1}$$

前一步 Newton-Raphson 迭代最后的截面柔度阵：

$$\mathbf{f}^{j=0}(x)=\mathbf{f}^{i-1}(x)$$

对截面力-变形关系的线性化，可以得到截面变形增量 $\Delta d^{j=1}(x)$：

$$\Delta\mathbf{d}^{j=1}(x)=\mathbf{f}^{j=0}(x)\cdot\Delta\mathbf{D}^{j=1}(x)$$

对应于图 2.3 中 B 点的状态，截面变形更新为

$$\mathbf{d}^{j=1}(x)=\mathbf{d}^{j=0}(x)+\Delta\mathbf{d}^{j=1}(x)$$

根据截面力-变形关系，为简单起见假设已知，截面变形 $d^{j=1}(x)$ 对应于抵抗力 $D_R^{j=1}(x)$ 和一个心的正切柔度矩阵 $f^{j=1}(x)$（图 2.3）。基于刚度法的有限元中，截面抵抗力 $D_R^{j=1}(x)$ 可以直接转换为单元抵抗力 $Q^{j=1}$，因此严格意义上违背单元内的平衡。因为这样我们是不愿意看到的，所以本文提出了一个新的非线性求解算法。此法先确定截面残余平衡力

$$\mathbf{D}_U^{j=1}(x)=\mathbf{D}^{j=1}(x)-\mathbf{D}_R^{j=1}(x)$$

然后转换为残余截面变形 $r^{j=1}(x)$

$$\mathbf{r}^{j=1}(x)=\mathbf{f}^{j=1}(x)\cdot\mathbf{D}_U^{j=1}(x) \tag{2.24}$$

残余截面变形是截面力-变形关系的线性化过程中变形线性预估所产生的的误差值。任意合适的柔度矩阵均可以用来计算残余变形，但本文使用的正切柔度矩阵可以得到最快的收敛。

使用虚功原理，在单元长度上对残余截面变形进行积分倒到残余单元变形：

$$\mathbf{s}^{j=1}=\int_0^L\mathbf{b}^T(x)\cdot\mathbf{r}^{j=1}(x)\cdot dx \tag{2.25}$$

此时相应迭代循环的第一次迭代 j=1 已经完成。j=1 时最终的单元和截面状态如图 2.3 的 B 点所示。残余截面变形 $r^{j=1}(x)$ 和残余单元变形 $s^{j=1}$ 由第一次迭代确定，但响应的变形向量并不变。反过来，它们作为 j 循环中余下步迭代

的起点。残余单元变形 $s^{j=1}$ 的存在违背了协调性，因为单元在共同节点处会有不同的位移。为保持单元交汇出的协调性，单元端部必须施加 $-\left[F^{j=1}\right]^{-1} * s^{j=1}$ 的修正力，其中 $F^{j=1}$ 是最新的（updated）由(2.10)截面柔度阵的积分得出的单元正切柔度阵。相应的力增量 $-b(x) * \left[F^{j=1}\right]^{-1}$ 被施加在所有控制截面，已得到一个大小为 $-f^{j=1}(x) * b(x) * \left[F^{j=1}\right]^{-1} * s^{j=1}$ 的变形增量。因此，在第二步迭代 j=2 中，单元和单元内的截面状态变化为如下：单元力变为：

$$\mathbf{Q}^{j=2} = \mathbf{Q}^{j=1} + \Delta\mathbf{Q}^{j=2}$$

where

$$\Delta\mathbf{Q}^{j=2} = -\left[\mathbf{F}^{j=1}\right]^{-1} \cdot \mathbf{s}^{j=1}$$

截面力和变形变为：

$$\mathbf{D}^{j=2}(x) = \mathbf{D}^{j=1}(x) + \Delta\mathbf{D}^{j=2}(x)$$

and

$$\mathbf{d}^{j=2}(x) = \mathbf{d}^{j=1}(x) + \Delta\mathbf{d}^{j=2}(x)$$

where

$$\Delta\mathbf{D}^{j=2}(x) = -\mathbf{b}(x) \cdot \left[\mathbf{F}^{j=1}\right]^{-1} \cdot \mathbf{s}^{j=1}$$

$$\Delta\mathbf{d}^{j=2}(x) = \mathbf{r}^{j=1}(x) - \mathbf{f}^{j=1}(x) \cdot \mathbf{b}(x) \cdot \left[\mathbf{F}^{j=1}\right]^{-1} \cdot \mathbf{s}^{j=1}$$

第二步迭代 j=2 的最后，单元和单元内截面的状态对应于图 2.3 的 C 点。计算所有截面新的正切柔度阵 $f^{j=2}(x)$ 和新的残余截面变形

$$\mathbf{r}^{j=2}(x) = \mathbf{f}^{j=2}(x) \cdot \mathbf{D}_U^{j=2}(x)$$

对残余截面变形积分得到残余单元变形 $s^{j=2}$，新的正切柔度阵 $F^{j=2}$ 通

过式（2.10）对截面柔度矩阵 $f^{j=2}(x)$ 积分得到。j 循环的第二次迭代完成。

第三次和以后的迭代计算方法如出一辙。当达到选择的收敛标准时，即可认为收敛，第 4 章将详述。对于 j 循环的总结可得到已知变形 q^{i} 下的单元抵抗力，如图 2.2 和 2.3 中的 D 点。接下来可以进行 Newton-Raohson 迭代过程的 i+1 步迭代。

应指出的是，在 j 循环中，单元变形 q^{i} 除在第一滴迭代 j=1 时外均不发生变化，j=1 时增量 $\Delta q^{j=1}=\Delta q^{i}$ 加在前一步 Newton-Raphson 迭代末尾的单元变形 q^{i-1} 上。这些变形增量由在 Newton-Raphson 迭代过程中施加在结构自由度上的修正荷载 ΔP_{E}^{i} 产生。对于 j>1，只有在非线性求解收敛到对应单元变形 q^{i} 的单元抵抗力 Q^{i} 时，单元力才会发生变化。如图 2.3 的 BCD 三点所示，其表示了 j 循环中对应迭代末尾时刻的单元状态，三点在同一垂直线上，而单元控制截面上对应的点并不是这样，如图 2.3 底部所示。这一特征保证了提出的非线性求解法在单元端部满足唯一协调性。

我们提出的非线性分析法有很多有点，单元的平衡总是严格的满足，因为截面力是根据式（2.6）单元力的插值得到的。不光在单元端部，沿单元的长度同样也满足协调性。石阶上，截面力的修正式中：

$$\Delta\mathbf{d}^{j}(x)=\mathbf{r}^{j-1}(x)-\mathbf{f}^{j-1}(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot\left[\mathbf{F}^{j-1}\right]^{-1}\cdot\mathbf{s}^{j-1}$$

满足等式（2.20）和（2.21）的后一部分，通过形函数 $a(x)$ 表达了截面和单元变形之间的关系。然而残余截面变形 $r^{j-1}(x)$ 并不严格满足协调条件。可以通过对残余变形 $r^{j-1}(x)$ 的积分来得到 s^{j-1}，然后使用变形型函数 $a(x)$ 来计算截面变形增量，即 $a(x)\bullet s^{j-1}$，从而满足协调条件。然而，由于这样做在计算性上来看很低效，本文计算残余截面变形 $r^{j-1}(x)$ 过程中出现很小的非协调性通常可以忽略。

当 j 循环中每一步迭代均在单元上满足协调和平衡时，如果在图 2.3 的 D 点能收敛，截面力-变形关系和接下来的单元力-变形关系仅仅在特定的范围内满足。换而言之，如果保持单元的平衡和协调，在接下里的迭代中，单元力将达到对应的单元变形的值。我们提出的非线性分析方法中的力-变形关系的近似法，可以于对单元的平衡和协调条件的近似，特别是当考虑钢筋混凝土本构模型的定

义不确定时。

2.5 非线性求解算法的小结

前一步分介绍了确定单元状态的过程，下面对逐步计算法进行小结。小结主要讨论在结构自由度上第 i 步迭代中的力，因为当前的研究的创新集中在确定单元状态这一过程。余下的非线性解法这一部分都用成熟的方法，比如本文所用的 Newton-Raphson 法。可以轻易实现求解法的更换，因为它可单元状态确定过程是独立的。Newton-Raphson 迭代和整个结构非线性解法的关系在图 2.2 的顶部表示出来，图 2.2 也显示了由下标的罗马字母表示的状态下，整个的求解算法和单元状态确定过程之间的关系。图 2.3 详细显示了对于一个单元的单元状态确定过程的发展，并与下面小结的第（4）和第（13）步相关。整个的求解算法的计算流程图在图 2.4 中显示，图 2.5 显示了单元状态确定的计算流程图。

第 i 步 Newton-Raphson 迭代归纳如下：

（1） 求解整体坐标下方程的解，并得出最新的结构位移。

在第 i 步 Newton-Raphson 迭代中，用 i-1 步迭代末尾的结构刚度阵 K_s^{i-1} 计算给定荷载增量 ΔP_E^i 下的结构位移增量 Δp^i 。

$$\mathbf{K}_s^{i-1} \cdot \Delta \mathbf{p}^i = \Delta \mathbf{P}_E^i \tag{2.26}$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{p}^{i-1} + \Delta \mathbf{p}^i \tag{2.27}$$

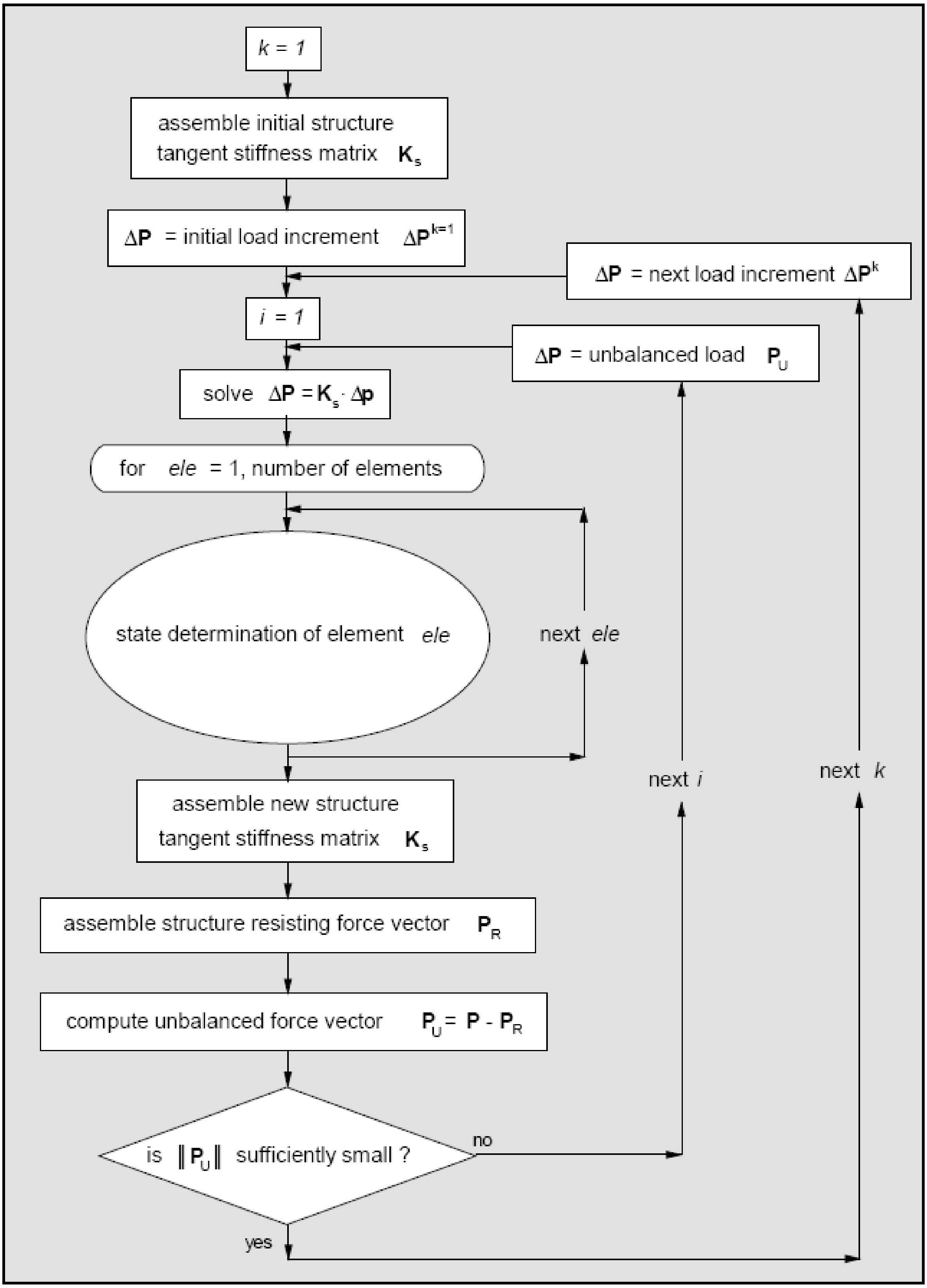


图 2.4 结构状态确定流程图

（2）计算单元变形增量并更新单元变形：

使用矩阵 L_{ele} ，它表示单元变形和单元位移的关系，则单元变形增量

Δq^i 为：

$$\Delta \mathbf{q}^i = \mathbf{L}_{ele} \cdot \Delta \mathbf{p}^i \tag{2.28}$$

$$\mathbf{q}^i = \mathbf{q}^{i-1} + \Delta \mathbf{q}^i \tag{2.29}$$

注意到 L_{ele} 是两个转换的组合：第一个转换是整体坐标系中单元位移 p 转换为单元局部参考坐标 $\bar{q}$，第一个转换是单元位移 $\bar{q}$ 通过消除刚体位移模式转换为单元变形 q 。

如 2.4 节中讨论的，显得单元变形 q^i 直到第 i+1 步 Newton-Raphson 迭代中才发生变化。非线性求解算法的余下步骤组成了单元状态确定过程，也就是得出已知单元变形 q^i 下的单元抵抗力。

（3） 开始确定单元状态，对结构的所有单元进行循环。
用 j 循环确定每个单元的状态，第一次迭代的标志是 j=1.

（4） 确定单元力增量。

单元力增量 ΔQ^j 由上一步 j 循环迭代末尾的单元刚度阵 K^{j-1} 确定：

$$\Delta \mathbf{Q}^j = \mathbf{K}^{j-1} \cdot \Delta \mathbf{q}^j \tag{2.30}$$

当 j=1 时，$K^0 = K^{i-1}$ 和 $\Delta q^1 = \Delta q^i$，其中 i-1 对应上一次 Newton-Raphson 迭代末尾的单元状态。当 j>1，Δq^j 为前一步迭代的残余单元变形，在第（13）步中得出。

（5） 更新单元力

$$\mathbf{Q}^j = \mathbf{Q}^{j-1} + \Delta \mathbf{Q}^j \tag{2.31}$$

当 j=1 时，$Q^0 = Q^{i-1}$，其中 i-1 对应上一次 Newton-Raphson 迭代末尾的单元状态。

（6） 确定截面力增量。第（6）至（11）步对所有单元控制截面（积分点）实行。

截面力增量 $\Delta D^j(x)$ 用力插值函数 $b(x)$ 得出。相应的，更新了截面

力 $D(x)$。

$$\Delta \mathbf{D}^j(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \Delta \mathbf{Q}^j \tag{2.32}$$

$$\mathbf{D}^j(x) = \mathbf{D}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{D}^j(x) \tag{2.33}$$

（7） 确定截面变形增量。

截面变形增量 $\Delta d^i(x)$ 是在截面力增量 $\Delta D^j(x)$ 产生的变形增量上，加上前一步迭代中的残余截面变形 $r^{j-1}(x)$。截面力增量由 j 循环中前一步迭代末尾的柔度矩阵 $f^{j-1}(x)$ 得出。

$$\Delta \mathbf{d}^j(x) = \mathbf{r}^{j-1}(x) + \mathbf{f}^{j-1}(x) \cdot \Delta \mathbf{D}^j(x) \tag{2.34}$$

$$\mathbf{d}^j(x) = \mathbf{d}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{d}^j(x) \tag{2.35}$$

当 j=1 时，$r^0(x)$。

（8） 确定截面的正切刚度和柔度矩阵。

为简单起见，假设截面力-变形关系是已知的，更新正切刚度阵 $k^j(x)$ 已得到新的截面变形 $d^j(x)$。刚度阵 $k^j(x)$ 反过来就可以得到柔度阵 $f^j(x)$。

$$\mathbf{f}^j(x) = \left[\mathbf{k}^j(x)\right]^{-1} \tag{2.36}$$

（9）确定截面抵抗力

确定截面抵抗力 $D_R^j(x)$，用截面力-变形关系得出当前变形 $d^j(x)$。

（10）确定截面的非平衡力

截面非平衡力 $D_U^j(x)$ 为施加的力 $D^j(x)$ 和抵抗力 $D_R^j(x)$ 之差

$$\mathbf{D}_U^j(x) = \mathbf{D}^j(x) - \mathbf{D}_R^j(x) \tag{2.37}$$

（11） 确定残余截面变形

截面非平衡里和心的截面柔度可以出刀残余截面变形 $r^j(x)$。

$$\mathbf{r}^j(x) = \mathbf{f}^j(x) \cdot \mathbf{D}_U^j(x) \tag{2.38}$$

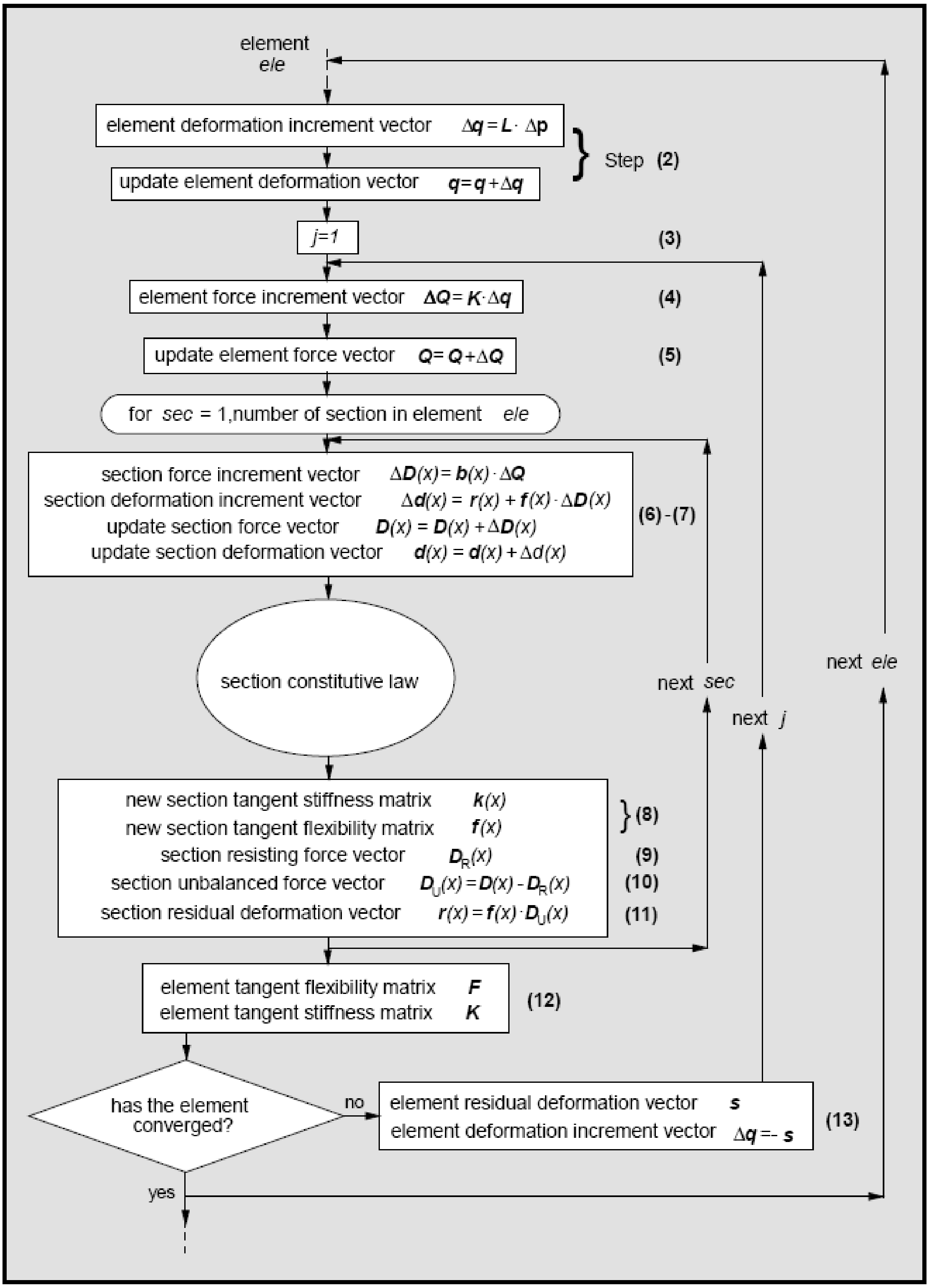


图 2.5 单元状态确定流程图：截面本构关系假设为已知。

（12）确定单元柔度和刚度矩阵。

对截面柔度阵 $f^j(x)$ 积分得到单元柔度阵 F^j 。反过来可得出刚度阵 K^j 。

$$\mathbf{F}^j = \left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{f}^j(x) \cdot \mathbf{b}(x) \cdot dx \right] \tag{2.39}$$

$$\mathbf{K}^j = \left[\mathbf{F}^j \right]^{-1} \tag{2.40}$$

（13） 检查单元收敛性

（a）如果截面所有截面的非平衡力都足够的小，可以认为单元已收敛。然后设定 $Q^i = Q^j$ 和 $K^i = K^j$ ，继续进行下一步。

（b）如果某些截面并未收敛，残余单元变形 s^j 由残余截面变形 $r^j(x)$ 的积分得到。

$$\mathbf{s}^j = \left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{r}^j(x) \cdot dx \right] \tag{2.41}$$

然后 j 变为 j+1，j 循环中开始新的一次迭代。然后式（2.30）中的 Δq^j 变为 Δq^{j+1} ，大小为 $-s^j$

$$\Delta \mathbf{q}^{j+1} = -\mathbf{s}^j \tag{2.42}$$

然后重复（4）至（13）步直到单元所有截面满足收敛。

（14）确定抵抗力和整体结构新的刚度阵

当所有单元都已收敛，第 i 步 Newton-Raphson 迭代就完成了。组集更新的结构抵抗力得到单元力向量

$$\mathbf{P}_R^i = \sum_{ele=1}^{n} \mathbf{L}_{ele}^T \cdot \left(\mathbf{Q}^i \right)_{ele} \tag{2.43}$$

当 n 为结构中所有梁-柱单元的数量时，加下标 ele 表示集合符号。新的结构刚度阵通过组集当前的单元刚度阵得到。

$$\mathbf{K}_s^i = \sum_{ele=1}^{n} \mathbf{L}_{ele}^T \cdot (\mathbf{K}^i)_{ele} \cdot \mathbf{L}_{ele} \tag{2.44}$$

此时结构抵抗力 P_R^i 与总的施加的荷载比较。如果其差值——结构非平衡力向量 ΔP_U^i 超出允许值，需进行第 i+1 步 Newton-Raphson 迭代。把 ΔP_E^i 替换为 $\Delta P_E^{i+1} = \Delta P_U$ ，再重复（1）至（14）步，直至结构自由度处产生收敛。

图 2.4 和 2.5 呈现了整个非线性分析过程。图 2.4 纵览整个过程——嵌套几个迭代循环，跟一贯的非线性分析并没有不同。算法的新特点在单元状态确定过程中表现出来，如图 2.5 单独说明。因为式（2.39）和（2.41）中在单元上的积分需要进行数值计算，图 2.5 介绍了对单元所有控制截面的附加的迭代循环。真实的数值计算情况推迟到第 4 张介绍。

为简洁期间，以上的非线性分析过程的前提是一个明了的截面变形关系。下一章强调这一算发在纤维梁-柱单元中的实施，其截面力-变形关系并不显而易见，不过可以从截面划分的纤维应力应变关系中推导出来。

第三章 钢筋混凝土纤维梁-柱单元

3.1 综述

前一章用柔度法对梁-柱单元进行列式。为简单期间，截面力-变心关系假设为明了的已知，为使我们提出的方法具有一般性，并没有更多对本构模型进行深入讨论。本章提出的方法专门针对由纵向纤维组成的梁-柱单元，其截面力-变形关系可以通过对纤维的单轴应力应变关系进行积分得到。

单元基于平截面假设，并且在变形过程中始终垂直于参考轴。这样可以得到一个简单截面广义变形和纤维应变的几何关系。单元的非线性性质完全从非线性纤维应力应变关系（材料非线性）中得出。单元列式以常规的混合法为基础，如前一章所述。变形插值矩阵与第 2 章中讨论的基于柔度的形式相同，而力插值矩阵用来表示线性弯矩和沿单元长度上一致的轴力分布。当无单元荷载时，这种形式是精确的。另外一种情况在第 4 章中讨论，届时会提出一个方法，在柔度法中包括存在单元荷载时的情况。

纤维单元的状态确定与第 2 章中提出的方法一样。在纤维梁柱单元中，仅知道截面力-变形关系是应力应变关系和纤维变形时程的函数。相应的，2.5 节中的方法需要加上几个步骤，来确定单元状态，即确定已知截面变形下的截面力和心的正切刚度矩阵。

对新的变量定义和正截面离散为纤维之后，讨论能描述纤维滞回性能的材料模型。接下来，相异的阐述了纤维截面模型的单元状态确定，本章通过正截面的纤维离散化引入的几个新步骤，得出整体非线性分析算法的小结。

3.2 模型假定

纤维梁柱单元的公式基于线性几何的假定。平截面在单元变形历史中保持为平面并与纵轴垂直。这种假设对于由均质材料组成的单元发生小变形的情况是可以接受的，而用来解释钢筋混凝土单元一些特征现象比如开裂和粘结滑移是不合理的。根据有限元分析的 smeared 裂概念，开裂影响和受拉刚度可以通过对预应力钢或钢筋混凝土的应力应变关系的适当修改而被包含在模型中。这种影响只在发生屈服阶段前的响应中是明显的，在发生较大非弹性变形产生滞回性能的研究中可以被忽略。相反，粘结滑移对单元变形的贡献随着荷载幅值和循环次数增加而更加明显。基于截面特性的单元粘结滑移变形的总结是一个很有挑战性的难题，而这在本研究范围之外。剪力效应也被忽略，这对于中等跨高比的构件是一种合理的近似。

由平截面假定可以知道所有的纤维应力应变行为都平行与该轴。因为参考轴是固定的，这意味着由截面几何形心形成的直线与该参考轴重合。如果单元没有遵守这个假定，它应该被分为连接所选择截面形心的子单元。

单元响应以及进一步整个结构的响应的精确度受到网格选择的影响，它包括用于对给定构件离散化的截面数量和在一个截面中纤维数量。更多的纤维数量肯定给出更好的结果，但计算花费也随之增加，因为在每一步迭代中，跟踪每一纤维滞回特性变化的历史都要被储存。纤维最优数量和最佳定位的选择及沿单元轴迭代点最优数量的选择都超出了本书研究范围。

3.3 广义力和广义变形

纤维梁柱单元如图 3.1 所示于局部坐标系统 x,y,z 中。它被分为一系列离散化横截面。这些被定位在应用于单元公式中数值积分形式的控制点上。本研究采用 Gass-Lobato 积分形式，因为它允许与单元两端截面相重合的两个积分点，在那里典型地发生了明显的非弹性变形。关于积分形式的更多细节在第 4 章中讲到。每一截面进一步分为 N（x）个纤维，n 是 x 的函数，以此来说明纵向钢筋沿着单元可能有变化的事实。为了清晰起见，n 对 x 的依赖性在本章剩余部分公式中不详述地引出来。

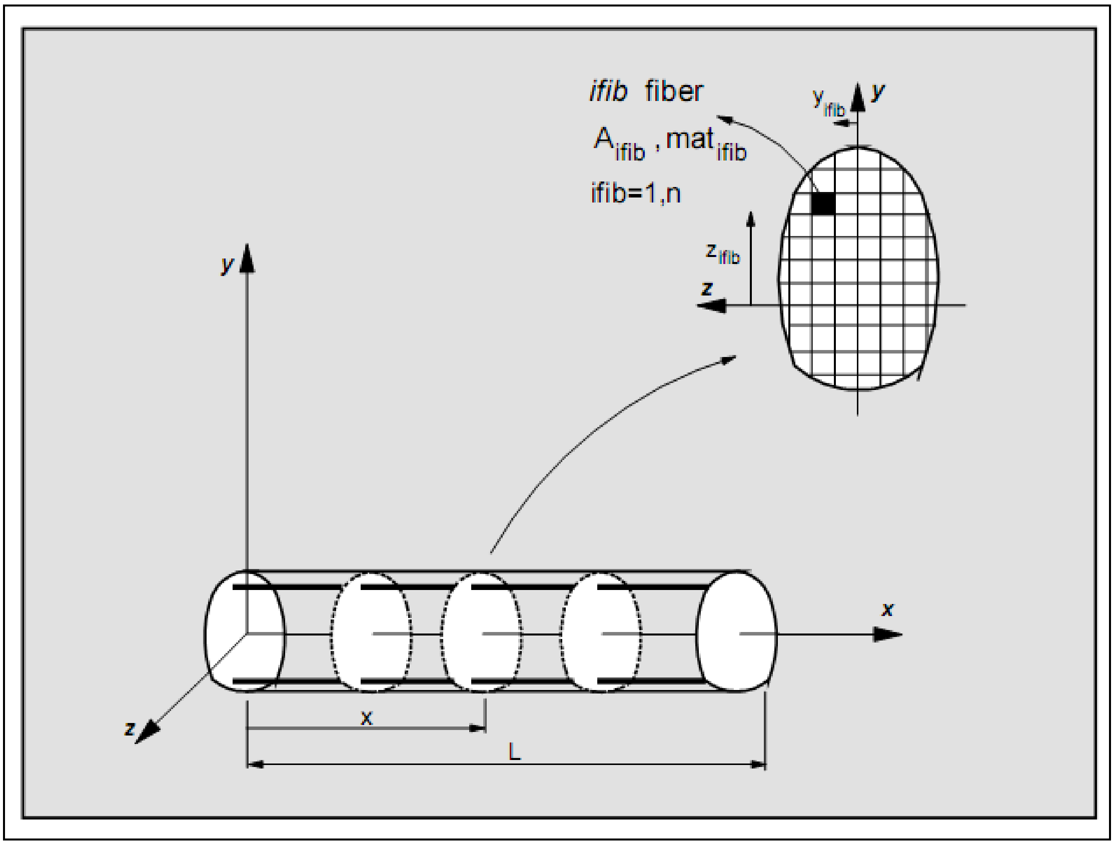


图 3.1　　在局部坐标系下的纤维梁柱单元：
细分纵截面为纤维

广义单元力和变形及相关的截面力和变形都在 2.2 节定义过，如图 2.1 所示。这些被分组成下列向量：

单元力向量
$$\mathbf{Q} = \{Q_1 \quad Q_2 \quad Q_3 \quad Q_4 \quad Q_5\}^T$$

单元变形向量
$$\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5\}^T \tag{3.2}$$

截面力向量

$$\mathbf{D}(x)=\begin{Bmatrix} M_z(x) \\ M_y(x) \\ N(x) \end{Bmatrix} \tag{3.3}$$

截面变形向量

$$\mathbf{d}(x)=\begin{Bmatrix} \chi_z(x) \\ \chi_y(x) \\ \varepsilon(x) \end{Bmatrix} \tag{3.4}$$

引进另外两个向量来描述各个截面纤维的状态，包括纤维应力和应变，写成下列形式：

纤维应变向量

$$\mathbf{e}(x)=\begin{Bmatrix} \varepsilon_1(x,y_1,z_1) \\ \vdots \\ \varepsilon_{ifib}(x,y_{ifib},z_{ifib}) \\ \vdots \\ \varepsilon_n(x,y_n,z_n) \end{Bmatrix} \tag{3.5}$$

纤维应力向量

$$\mathbf{E}(x)=\begin{Bmatrix} \sigma_1(x,y_1,z_1) \\ \vdots \\ \sigma_{ifib}(x,y_{ifib},z_{ifib}) \\ \vdots \\ \sigma_n(x,y_n,z_n) \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

在纤维状态向量中，x 描述沿着纵向参考轴线截面的位置，yifib,zifib 表示纤维在横截面中的位置，如图 3.1 所示。根据平截面假定，纤维应变向量和截面变形向量有简单矩阵关系

$$\mathbf{e}(x)=\mathbf{l}(x)\cdot\mathbf{d}(x) \tag{3.7}$$

其中 L(x)为线性几何矩阵如下：

$$\mathbf{l}(x)=\begin{bmatrix} -y_1 & z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_{ifib} & z_{ifib} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -y_n & z_n & 1 \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

相容矩阵 L(x)更复杂的形式可以用来说明剪力和粘结滑移效应，而这超出了本书研究的范围。

3.4 纤维本构模型

该纤维梁柱单元的非线性特征完全来自纤维的非线性特征。因此，分析结果的有效性取决于纤维材料模型的精确度。由于目前的研究仅限于钢筋混凝土构件的滞回性能，忽略粘结滑移的影响，所以只要求两种材料模型：一种对应于混凝土，另一种对应于钢筋。单元公式简化了对于单轴行为材料模型选择的任务，这到目前为止已经研究得很深入并很好地建立起来。材料行为的三维效应可以通过适当修改定义单调包络的参数而被包含于单轴模型中。对于混凝土这很重要，其由横向和纵向钢筋产生的约束对应力应变特性有显著影响。

本研究采用 Filippou 等人所讨论的模型（1983）。虽然过去十年里相继提出了许多改进的约束混凝土模型（1988 年 Mander 等，1990 年 Sheikh 和 Yeh ），Filippou 等人的钢筋模型（1983）仍是最精确的模型之一。而且，本研究采用的模型在简化性和精确度之间取了个折衷，对于混凝土滞回性能仍是一个很不错的选择。第 5 章中分析和试验结果的对比表明对钢筋混凝土梁柱单元在较小轴向荷载下，混凝土材料模型显示出令人满意的精确度。在任何情况下，构成该梁柱单元基础的模块化方案结构允许材料模型的简单变化，在不久的未来将发展更广泛的材料库。

指出应力应变模型都是应变的显函数很重要。这是与该纤维模型相联系的材料模型的显著特点，其中纤维应变依据公式（3.7）由截面变形确定。应力确定中只包含一个基于当前纤维应力和应变及给定的应变增量的函数值。这减少了考虑非应变显函数材料模型的计算花费，例如著名的 Ramberg-Osgood 钢筋模型。

3.4.1 钢筋应力应变关系

Menegotto 和 pinto（1973）的非线性模型描述了钢筋应力应变行为，Filippou 等人（1983）修改后包括了各向同性的应变硬化。此模型计算效率高且很好地符合通过对钢筋杆循环试验得到的试验结果。

Menegotto 和 Pinto（1973）表述的模型写成以下形式：

$$\sigma^* = b\cdot\varepsilon^* + \frac{(1-b)\cdot\varepsilon^*}{\left(1+\varepsilon^{*R}\right)^{1/R}} \tag{3.9}$$

其中

$$\varepsilon^{*}=\frac{\varepsilon-\varepsilon_{r}}{\varepsilon_{0}-\varepsilon_{r}} \tag{3.10}$$

$$\sigma^{*}=\frac{\sigma-\sigma_{r}}{\sigma_{0}-\sigma_{r}} \tag{3.11}$$

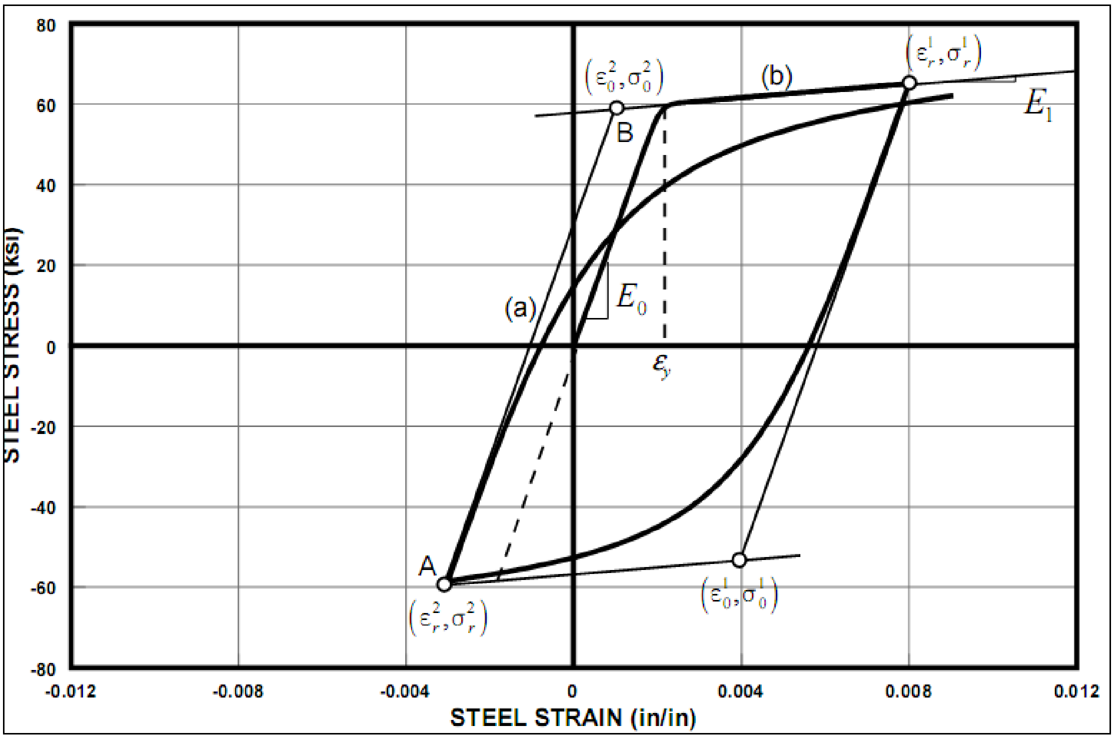


图 3.2 MENEGOTTO-PINTO 钢筋模型

公式（3.9）表述一条从一渐近线斜率 Eo 到另一渐近线斜率 E1 的曲线过渡（分别为线（a）和线（b），如图 3.2 所示）。σ_0 和 ε_0 分别是两条渐近线相交点的应力和应变（图 3.2 的点 B）；类似地，σ_r 和 ε_r 分别为应力和与之标记颠倒的最后应变的相交点的应力和应变（图 3.2 中的点 A）；b 为应变硬化率，即斜率 E_1 和 E_0 的比值，R 是影响过渡曲线形状和很好表示鲍申格尔效应的参数。如图 3.2 所示，（ε_0，σ_0）和（ε_r，σ_r）在每一次应变反转后更新。

R 值取决于当前渐近线交点处（图 3.3 点 A）和前面荷载反转点处（最大或最小应变取决于相关钢筋应力是正还是负（图 3.3 点 B））的应变差值。R 的表达式取自 Menegotto 和 Pinto（1973）建议的形式

$$R=R_{0}-\frac{a_{1}\cdot\xi}{a_{2}+\xi} \tag{3.12}$$

其中 ξ 随应变反转而更新。R_0 为初次加载时的参数 R 值，a_1，a_2 是和 R_0 一起

通过试验确定的参数。ξ的定义对于部分卸载后再次加载的情况仍然有效。

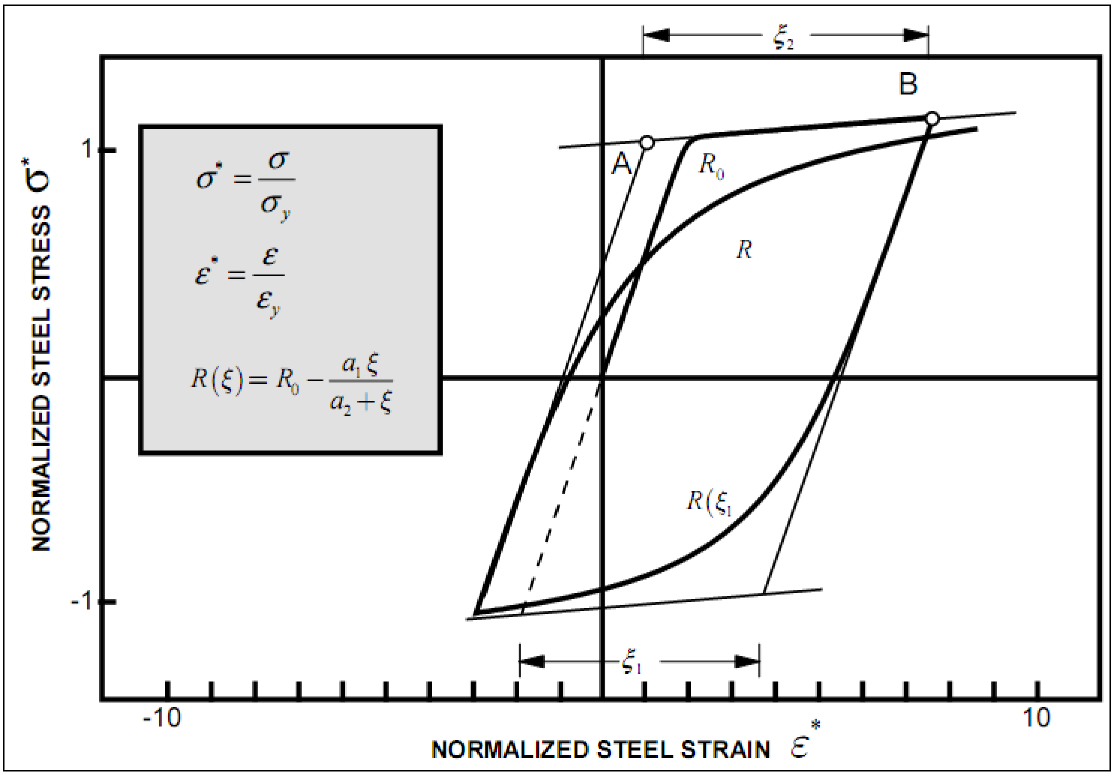


图 3.3　MENEGOTTO-PINTO 钢筋模型中的曲率参数 R 的定义

作为对方程（3.10）和（3.11）的补充，需要对卸载和再加载的规则制定做一些澄清，以允许适用广义的荷载历史。如果分析模型对所有前面应力应变历史分支有记忆，那么只要新的再加载曲线到达它，它将顺沿前面再加载的分支路径。这就要求模型储存所有必要信息来折回所有前面处于不完全的再加载曲线路径。而从计算角度看这是不现实的。所以过去应力应变历史的记忆限制在预先定义的几条控制曲线上，这些曲线在目前模型中包括有：

1 单调包络线
2 起源于具有最小ε值反转点的最上面一条上升分支曲线，
3 起源于具有最大ε值反转点的最下面一条下降分支曲线，
4 起源于最新反转点的当前曲线。

由于上述的限制，部分卸载后再加载在到达卸载开始点后不能再加入原先的再加载曲线，相反继续形成一条新的再加载曲线直至达到包络线为止。然而，分析模型与实际特性间的差别是很小的，正如 Filippou 等详细讨论的那样（1983）。

上述对应于最简单形式的模型，如 Menegotto 和 Pinto（1973）所述：弹性和屈服渐近线假定为直线，对应屈服面的限制渐近线的位置假定在整个过程中固定，斜率E_0保持为常数（图 3.2）。

尽管公式做了简化，模型还是能够很好地符合试验结果。它主要的缺点在于它不允许发生各向同性的硬化。为了说明这种效应，Filippou 等（1983）提出了在线性屈服渐近线中的应力转移，其作为最大弹性应变的一个函数，如下：

$$\frac{\sigma_{st}}{\sigma_y} = a_3 \cdot \left(\frac{\varepsilon_{max}}{\varepsilon_y} - a_4 \right) \qquad (3.13)$$

其中$\varepsilon_{\max}$为应变反转瞬间的绝对值最大的应变，ε_y，σ_y分别为屈服应变和应力，a_3和a_4是试验确定的参数。本研究采用的模型不包括各向同性应变硬化。对于这种情况，参数值分别为：$R_0 = 20$，$a_1 = 18.5$，$a_2 = 0.15$，$a_3 = 0$，$a_4 = 0$。除了最后两个参数，其余值均采用 Menegotto 和 Pinto（1973）原始模型的值。

3.4.2 混凝土应力应变关系

为了计算每一层混凝土应力，需要一种描述混凝土在任意循环应变历史下的应力应变关系的材料规律。关于混凝土模型对承受弯矩和较小轴力的钢筋混凝土构件的综合性能的影响有一些不确定性。一些研究者已经总结出一种粗糙的混凝土模型已经足够准确预测试验结果。在单调加载和限于小幅度激励的循环加载情况下，这也许是正确的。然而，在大幅度循环加载情况下这就不正确了。研究结果表明钢筋混凝土构件在大幅度循环激励下强度的损失很大程度上取决于约束混凝土在应变远远超出最大强度下承受应力的能力。这需要采用完善的混凝土模型。

本书研究中采用的模型概述如下：

受压混凝土单调包络曲线遵循 Kent 和 Park（1973）的后来被 Scott 等人（1982）扩展的模型。尽管之后发表有更精确和更完善的模型，但所谓的修正 Kent 和 Park 模型在简便和精确性之间提供了很好的平衡。

在修正 Kent 和 Park 模型中，通过三个区域描述单调受压混凝土应力应变关系：

$$\varepsilon_c \le \varepsilon_0 \qquad \sigma_c = K f'_c \left[2\left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right) - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_0}\right)^2 \right] \qquad (3.14)$$

$$\varepsilon_0 \le \varepsilon_c \le \varepsilon_u \qquad \sigma_c = K f'_c \left[1 - Z\left(\varepsilon_c - \varepsilon_0\right) \right] \ge 0.2 K f'_c \qquad (3.15)$$

其中

$$\varepsilon_0 = 0.002K \qquad (3.16)$$

$$K = 1 + \frac{\rho_s f_{yh}}{f'_c} \qquad (3.17)$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3 + 0.29 f'_c}{145 f'_c - 1000} + 0.75 \rho_s \sqrt{\frac{h'}{s_h}} - 0.002K}$$

其中ε_0是在最大应力下的混凝土应变，K 是说明由于约束强度提高的一个系数，Z 是应变软化斜率，$f_c^{'}$是混凝土循环受压强度，单位 MPa（1MPa=145psi），f_{yh}是箍筋的屈服强度，单位 MPa，ρ_s是箍筋体积与从箍筋外边量起的核心混凝土体积之比，$h^{'}$是从箍筋外边缘量起的核心混凝土的宽度，s_h是箍筋或加箍物中心到中心间的距离。

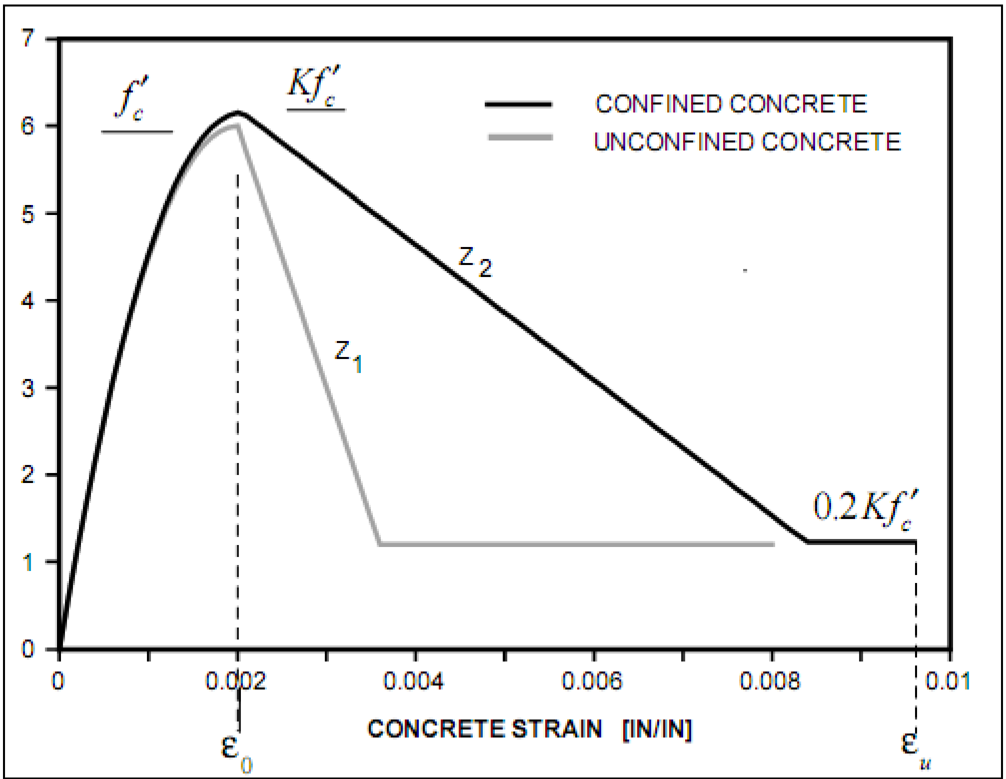


图 3.4　　约束与无约束混凝土的应力应变关系

对于箍筋约束混凝土情况，Scott 等人建议ε_u从以下公式保守地定义为：

$$\varepsilon_u = 0.004 + 0.9\rho_s\left(f_{yh}/300\right) \qquad (3.18)$$

为了说明混凝土保护层的压碎，一旦受压应变超过本研究设定为 0.005 的ε_u值，保护层强度较低到$0.2f_c^{'}$。在该模型中忽略混凝土受拉强度，因为它只对屈服前循环荷载下的钢筋混凝土截面响应有影响。下列规律支配了混凝土应力应变关系的滞回性能（图 3.5）：

1 从包络曲线一点沿一条连接开始卸载点ε_r和根据公式给定的轴应变点ε_ρ的直线进行卸载

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 0.145 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right)^2 + 0.13 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right) \quad \text{for} \quad \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right) < 2 \tag{3.19}$$

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 0.707 \cdot \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} - 2\right) + 0.834 \quad \text{for} \quad \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0}\right) \geq 2 \tag{3.20}$$

其中ε_0是对应于最大受压应力的应变水平。

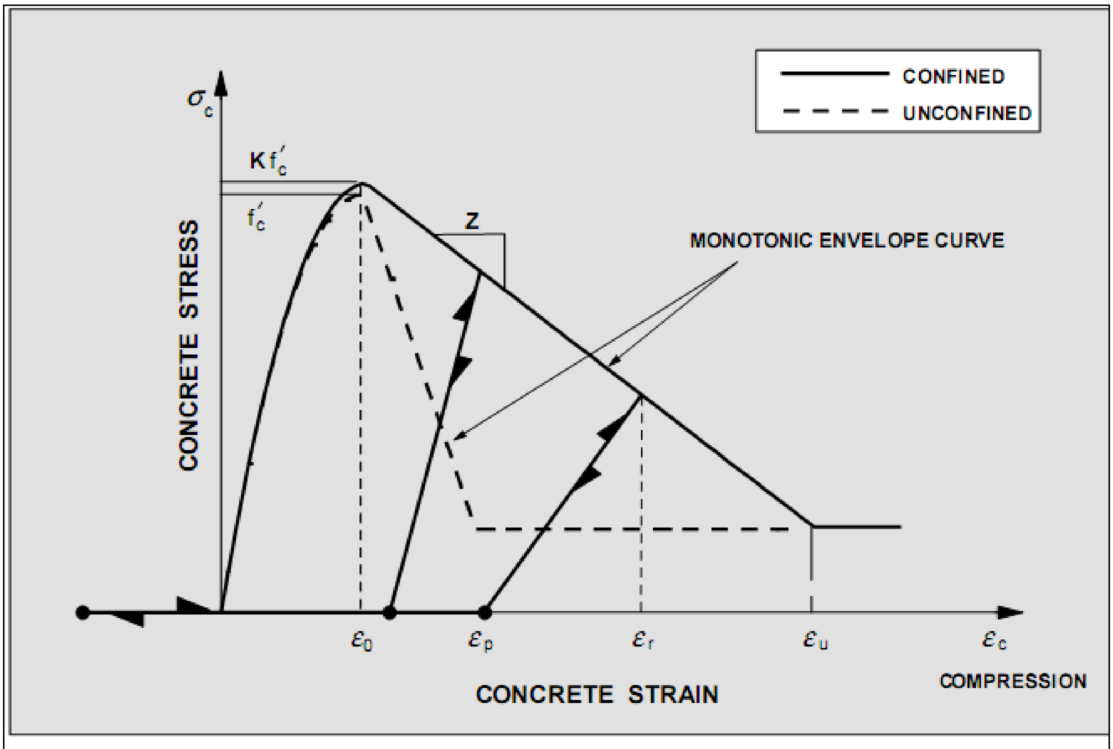


图 3.5　　混凝土应力应变关系的滞回性能

公式（3.19）由 Karsan 和 Jirsa(1969)提出，通过二次曲线把包络线的标准化应变和卸载完成时应变联系起来。因为公式（3.19）在高受压应变情况下显示出不合理的特性，把公式（3.20）加进模型中使得在高受压应变下弹性系数保持为正值。

2 由于本书研究中忽略受拉强度，当应变小于卸载完成时的应变时（开裂），混凝土应力等于零。

3 只要应变小于卸载完成时的应变（开裂），重新加受压荷载时，应变为零。一旦混凝土应变比此值大，再加载继续沿着以前卸载的路径（图 3.5）。在实际情况下，卸载和再加载沿着非线性路径，一起形成一个滞回环。因简化这种情况在这里被忽略，因为它对于构件滞回响应影响很小。

该受压混凝土滞回特性不能解释混凝土的循环破坏。它对钢筋混凝土构件滞回特性的影响的重要性值得进一步研究，但超出了本报告的范围。

3.5 纤维梁柱单元阐述

纤维梁柱单元用 2.3 节使用过的综合有限元方法同样的框架来阐述。单元位移场用方程（2.20）和（2.21）定义的柔度形函数来表示。选择力场使得图 2.1

中的两种弯矩场 $M_z(x)$ 和 $M_y(x)$ 是线性的而轴力场 N(x)是常数。选择结果导致生成力插值函数的矩阵，如下给出

$$\mathbf{b}(x)=\begin{bmatrix}\left(\frac{x}{L}-1\right) & \left(\frac{x}{L}\right) & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \left(\frac{x}{L}-1\right) & \left(\frac{x}{L}\right) & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (3.21)$$

其中 b(x)联系沿单元力的分布 D(x)与单元广义力向量 Q 有如下关系

$$\mathbf{D}^i(x)=\mathbf{b}(x)\cdot\mathbf{Q}^i \quad \text{and} \quad \Delta\mathbf{D}^i(x)=\mathbf{b}(x)\cdot\Delta\mathbf{Q}^i \quad (3.22)$$

当不存在单元荷载时，弯矩和轴力场是精确的。通过修改相关弯矩和轴力分布，单元荷载能被包含在分析的初始阶段，使得它们对特殊加载情况是精确的。这种情况和它的数值实现的更多细节将在第 4 章介绍。

最终联系所施加的不平衡单元力 $P-Q^{i-1}$ 与未知单元变形增量 Δq^i 的矩阵方程等效为方程（2.23）

$$\left[\mathbf{F}^{i-1}\right]^{-1}\cdot\Delta\mathbf{q}^i=\mathbf{P}-\mathbf{Q}^{i-1} \quad (3.23)$$

其中上标表示对应的 Newton-Raphson 迭代。

单元状态确定遵循 2.4 节中表述的几个步骤。由于截面力-变形关系不再明确而取决于纤维应力应变特性，附加一些步骤就变得很有必要。当截面力-变形关系是明确已知时，截面新切线刚度 $k^j(x)$ 对于给定的截面力 $D^j(x)$ 和变形 $d^j(x)$ 就可以之间算出，如 2.4 节和 2.5 节中所述。对于纤维模型，根据平截面假定方程（3.8）中的几何矩阵 $l(x)$ 首次用于针对给定变形增量 $\Delta d^j(x)$ 获得纤维应变增量

$$\Delta\mathbf{e}^j(x)=\mathbf{l}(x)\cdot\Delta\mathbf{d}^j(x)$$

更新纤维应变到新值

$$\mathbf{e}^j(x)=\mathbf{e}^{j-1}(x)+\Delta\mathbf{e}^j(x)$$

所有纤维新应力 σ_{ifib}^j 和切线模量 E_{ifib}^j 都从适当的纤维应力应变关系中确定：纤维应力分组于向量 E^j 中，切线模量写成对角矩阵 $E_{\tan}^j$。通过调用包括所有纤维面积 A_{ifib} 的对角矩阵 A 及利用方程（3.8）中的截面相容矩阵 I(x)，

$$\mathbf{k}^j(x)=\mathbf{l}^T(x)\cdot\left(\mathbf{E}_{tan}^j\mathbf{A}\right)\cdot\mathbf{l}(x) \quad (3.24)$$

由结构分析概念生成新的截面切线刚度矩阵进行乘法计算后得到

$$\mathbf{k}^j(x)=\begin{bmatrix} \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}^2 & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}\cdot z_{ifib} & -\sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib} \\ \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}\cdot z_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot z_{ifib}^2 & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot z_{ifib} \\ -\sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot z_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} E_{ifib}^j\cdot A_{ifib} \end{bmatrix}$$

转化新截面切线刚度矩阵 $k^j(x)$ 用于获得新截面切线柔度矩阵 $f^j(x)$。类似地，截面抗力 $D_R^j(x)$ 不能直接由第 2 章中的截面力-变形关系获得，但可以通过累加所有纤维的轴力和双向弯矩分布来确定

$$\mathbf{D}_R^j(x)=\mathbf{l}^T(x)\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{E}^j \qquad (3.25)$$

或者进行乘法运算后为

$$\mathbf{D}_R^j(x)=\begin{Bmatrix} -\sum_{ifib=1}^{n} \sigma_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib} \\ \sum_{ifib=1}^{n} \sigma_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot z_{ifib} \\ \sum_{ifib=1}^{n} \sigma_{ifib}^j\cdot A_{ifib} \end{Bmatrix}$$

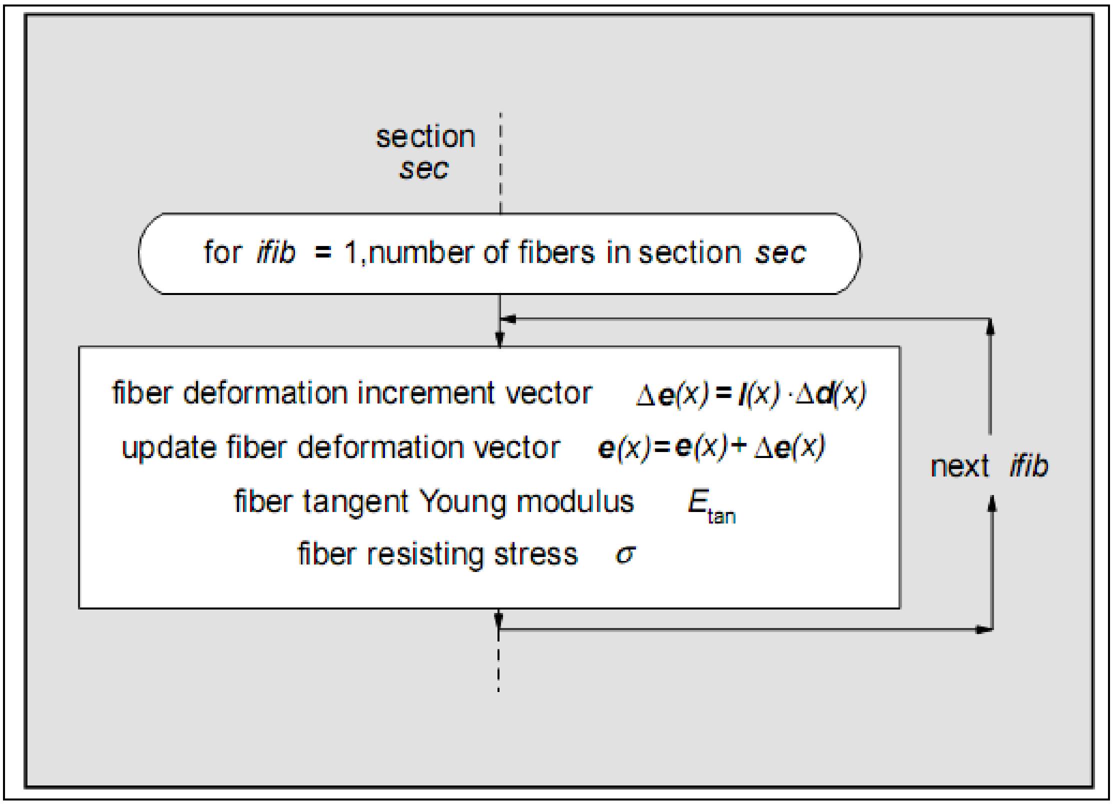


图 3.6　　截面纤维状态确定的流程图

重要的是要指出所有截面矩阵和向量都是在固定截面参考系中计算的，与单元 y 轴和 z 轴重合。这种选择简化了计算。如图 2.1 所示的参考系原点（x,0,0）不必与截面中性轴重合。由于分析过程中中性轴位置的改变，使用中性轴作为参考需要在每一步单元迭代中确定中性轴的位置，如 Zeris 和 Mahin(1991)讨论的那样。截面柔度矩阵和截面变形向量需要在通过积分确定单元柔度矩阵和单元残余变形之前转换到单元坐标系中。类似地，利用关于单元系统的力插值函数计算截面力，在入手确定截面状态前应该把截面力转换到局部坐标系统中。为了简化在单元和截面变量间的转换并注意到截面参考系统的选择是任意的，应当选择一种容易利用的截面参考系统比如 y 轴和 z 轴。因此，不需要计算截面中性轴。

有关确定纤维状态的步骤如图 3.6 阐明。通过把图 3.6 的图表引进到由图 2.5 的截面本构规律表示的方框中，现在已经完成了图 2.5 中的单元状态确定流程图。剩余的单元状态确定程序与 2.4 节和 2.5 节描述的一致。下一节将总结完整的单元状态确定，而没有进一步分析第 2 章中所讨论过的相关步骤，只有少量的关于截面状态确定步骤分析。

3.6 纤维梁柱单元状态确定综述

在结构状态确定过程中，第 i 步 Newton-Raphson 迭代过程如下所述：

（1）　求解方程整体坐标系统，更新结构位移

$$\mathbf{K}_s^{i-1} \cdot \Delta \mathbf{p}^i = \Delta \mathbf{P}_E^i \tag{3.26}$$

$$\mathbf{p}^i = \mathbf{p}^{i-1} + \Delta \mathbf{p}^i \tag{3.27}$$

（2） 计算单元变形增量和更新单元变形。

$$\Delta \mathbf{q}^{i} = \mathbf{L}_{ele} \cdot \Delta \mathbf{p}^{i} \tag{3.28}$$

$$\mathbf{q}^{i} = \mathbf{q}^{i-1} + \Delta \mathbf{q}^{i} \tag{3.29}$$

（3） 开始纤维梁柱单元状态确定

置 j=1

(4) 计算单元力增量。

$$\Delta \mathbf{Q}^{j} = \mathbf{K}^{j-1} \cdot \Delta \mathbf{q}^{j} \tag{3.30}$$

（5）更新单元力

$$\mathbf{Q}^{j} = \mathbf{Q}^{j-1} + \Delta \mathbf{Q}^{j} \tag{3.31}$$

（6）计算截面力增量。

$$\Delta \mathbf{D}^{j}(x) = \mathbf{b}(x) \cdot \Delta \mathbf{Q}^{j} \tag{3.32}$$

$$\mathbf{D}^{j}(x) = \mathbf{D}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{D}^{j}(x) \tag{3.33}$$

（7）计算截面变形增量

$$\Delta \mathbf{d}^{j}(x) = \mathbf{f}^{j-1}(x) \cdot \Delta \mathbf{D}^{j}(x) + \mathbf{r}^{j-1}(x) \tag{3.34}$$

$$\mathbf{d}^{j}(x) = \mathbf{d}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{d}^{j}(x) \tag{3.35}$$

（8）计算纤维变形增量。

根据平截面假定并假设不发生粘结滑移，利用截面相容矩阵 $l(x)$ 从截面变形增量 $\Delta d^{j}(x)$ 中获得纤维应变增量 $\Delta e^{j}(x)$。然后更新纤维应变

$$\Delta \mathbf{e}(x) = \mathbf{l}(x) \cdot \Delta \mathbf{d}(x) \tag{3.36}$$

$$\mathbf{e}^{j}(x) = \mathbf{e}^{j-1}(x) + \Delta \mathbf{e}^{j}(x) \tag{3.37}$$

（9）计算纤维应力和切线模量

利用 3.4 节中的纤维材料模型，从前面第 j-1 步的应力 σ_{ifib}^{j-1} 和应变 ε_{ifib}^{j-1} 及当前纤维变形增量 $\Delta\varepsilon_{ifib}^{j}$ 中计算所有纤维应力 $\sigma_{ifib}^{j}(x, y_i, z_i)$ 和切线模量 $E_{ifib}^{j}(x)$。

（10）计算截面切线刚度和柔度矩阵。

利用所有纤维的切线模量 $E_{ifib}^{j}(x)$ 计算新截面切线刚度矩阵 $k^{j}(x)$：

$$\mathbf{k}^j(x)=\begin{bmatrix}\sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}^2 & \sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}\cdot z_{ifib} & -\sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}\\ \sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}\cdot z_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot z_{ifib}^2 & \sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot z_{ifib}\\ -\sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot z_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n}E_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\end{bmatrix} \quad (3.38)$$

其中 n 是截面中纤维的总数，A_{ifib} 为纤维面积。然后转换刚度矩阵得到新截面柔度矩阵

$f^j(x)$

$$\mathbf{f}^j(x)=\left[\mathbf{k}^j(x)\right]^{-1} \quad (3.39)$$

（11）计算截面抗力

通过累加所有纤维的轴力和双向弯矩分布计算截面抗力 $D_R^j(x)$

$$\mathbf{D}_R^j(x)=\begin{Bmatrix}-\sum_{ifib=1}^{n}\sigma_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot y_{ifib}\\ \sum_{ifib=1}^{n}\sigma_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\cdot z_{ifib}\\ \sum_{ifib=1}^{n}\sigma_{ifib}^j\cdot A_{ifib}\end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

从这里开始单元状态确定与 2.5 节相同。

（12）计算截面不平衡力。

$$\mathbf{D}_U^j(x)=\mathbf{D}^j(x)-\mathbf{D}_R^j(x) \quad (3.41)$$

（13）计算截面残余变形。

$$\mathbf{r}^j(x)=\mathbf{f}^j(x)\cdot\mathbf{D}_U^j(x) \quad (3.42)$$

（14）计算单元柔度和刚度矩阵。

$$\mathbf{F}^j=\left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x)\cdot\mathbf{f}^j(x)\cdot\mathbf{b}(x)\cdot dx\right] \quad (3.43)$$

$$\mathbf{K}^j=\left[\mathbf{F}^j\right]^{-1} \quad (3.44)$$

（15）检查单元的收敛性

a) 如果单元已收敛，令 $Q^i=Q^j$，$K^i=K^j$，然后转到第（16）步；

b) 如果单元没有收敛，计算单元残余变形

$$\mathbf{s}^j = \left[\int_0^L \mathbf{b}^T(x) \cdot \mathbf{r}^j(x) \cdot dx \right] \tag{3.45}$$

然后增加 j 到 j+1，令 $\Delta q^{j+1} = -s^j$。把 Δq^{j+1} 代入，重复步骤（4）到（15），直到单元收敛。

（16）计算结构抗力和新结构刚度矩阵。

如果所有单元已经收敛，完成 Newton-Raphson 第 i 步迭代。

$$\mathbf{P}_R^i = \sum_{ele=1}^{n} \mathbf{L}_{ele}^T \cdot \left(\mathbf{Q}^i\right)_{ele} \tag{3.46}$$

$$\mathbf{K}_s^i = \sum_{ele=1}^{n} \mathbf{L}_{ele}^T \cdot \left(\mathbf{K}^i\right)_{ele} \cdot \mathbf{L}_{ele} \tag{3.47}$$

如果达到结构水平上的收敛，施加新荷载增量，否则继续进行 Newton-Raphson 迭代。

第四章　梁柱单元的数值实现

4.1 概述

本章将讨论涉及在通用计算程序中纤维梁柱单元的数值实现的一些问题。单元首先在独立计算程序中实现。在成功测试其性能后，单元被改编到由加利福利亚大学伯克利分校的 R.L.Taylor 教授开发的有限元程序 FEAP 中，并由 Zienkiewicz 和 Taylor 对其进行描述（1989 和 1991）。本文主要关注独立程序的数值方法方面及简单讨论独立程序和 FEAP 中数值策略的不同点。

独立程序对于由纤维梁柱单元组成的框架分析是一种特殊用途的程序。输入数据包括关于几何、结构材料特性的信息以及所施加的节点和单元荷载信息。节点荷载可以是不变的或是随时间变化，后者是按顺序逐步施加荷载。单元荷载是不变的，在分析开始和不变的节点荷载一起施加。

非线性求解算法被分为三个嵌套循环。第一个和最外面一个循环包括荷载分成的加载步骤顺序。第二个循环包括 Newton-Raphson 求解过程，这对于在每一加载步骤中确定由总施加荷载引起的结构位移是必要的。这个循环也涉及到结构状态确定。第三个和最里面一个循环包括单元迭代过程，这对于在每一 Newton-Raphson 迭代中计算与给定单元变形对应的单元抗力是必要的。这个循环也涉及到单元状态确定。

为了更好地阐述三个嵌套循环，拓展了前面章节中使用的符合表示，使得每一个变量能记载关于加载步骤数、当前 Newton-Raphson 迭代步数以及在必要情况下的当前单元迭代步数的信息。这种信息通过变量三种不同上标来表示：和前面两章的符合表示法一致，k 表示加载步数，i 表示 Newton-Raphson 迭代步数而 j 表示单元迭代循环数。这种符合表示法在非线性求解算法的数值实现中是有特别有用，其总结在附录 A 中。

在简单讨论符合表示法和沿单元轴数值积分方案后，讨论在单元和结构水平上定义收敛准则的问题。探讨不同备选方案的优缺点。独立程序采用的准则是基于结构和单元水平上不平衡力，而 FEAP 采用结构水平上的能量准则，单元水平上采取相对应的准则。

模型中包含单元荷载的过程在下一章讲到。首先假设一种与所施加单元荷载相平衡的初始力分布。用相对应的单元残余变形开始单元迭代，最后将算出所施加单元荷载引起的固端弯矩。然后加入刚体位移模式使得包括由单元荷载引起的剪力。得出的固端弯矩和剪力通常在结构节点上不满足平衡，因为与单元荷载连接的结构开始没有受到任何的节点力。得出的端部弯矩和剪力对不平衡节点荷载有贡献，后者需要在结构节点上反号施加以恢复平衡。这个步骤包括了对施加单元荷载的首次 Newton-Raphson 迭代。如果单元处于弹性状态，不必在单元里进行下一步迭代，得出的端部弯矩组成所施加单元荷载引起的固端弯矩。如果单元在单元荷载施加过程中经历非弹性行为，算法中的单元状态确定阶段的迭代收敛至单元固端力。

提出了两种包括剪力的备选方法。一种在独立程序中实现，另一种应用于 FEAP。用一个施加均匀分布荷载的线弹性悬臂梁的简单例子来表述单元施加荷载的过程。

本章对利用非线性算法确定软化单元状态进行简单的讨论。用一个由两根串联弹簧构成的简单系统来说明该算法处理软法单元取得的良好效果。

4.2 初步考虑

纤维梁柱单元的实现经历了两个阶段的发展。首先为了测试单元性能开发出独立计算程序。第二阶段在有限元程序 FEAP 中实现此单元。本报告计算的考虑更关注于单元的通用实现方法而不是对于两种数值实现特殊细节的讨论。

在这两种实现方法中输入数据包括有几何描述和结构材料特性。从几何角度看结构是连接于节点的梁柱单元的集合，使得分组于向量 P 的节点自由度成为问题的基本未知量。单元变形 q 通过一个不变的相容矩阵 L_{ele} 与结构自由度 P 相联系。每一个单元进一步被分成一些控制截面，每一个截面由很多的纤维构成。截面数量及其位置取决于积分方案和所要求的精度水平。一个截面中纤维数量取决于截面的几何特征与材料特性及截面描述细节的水平。每一纤维通过面积、材料类型和在截面参考系统中（图 3.1）位置等来表征。局部系统的原点就是截面几何形心。截面几何形心的集合定义了单元纵轴 x。单元材料特性完全取决于纤维应力应变关系，这遵循 3.4 节中讲到的约束与非约束混凝土模型和钢筋模型。不同混凝土和钢筋材料类型通过改变材料参数值指定纤维。

外部荷载以节点力或单元荷载形式施加到结构上。增加的静力荷载包括在引进一种虚构时间尺度的分析中。一般地，所有的恒荷载在分析开始时施加，而增加的荷载以顺序步骤 k=1,…,nk 逐步施加。节点力和单元荷载施加中采用了这两种不同的方法。遵循经典的结构分析方法节点荷载集合在整体力向量 P_E 中。单元荷载包括于单元荷载向量 W 中，而一种在基于柔度梁柱单元中合并这些荷载的新方法将在 4.5 节中描述。

相对应不同结构离散程度，非线性分析算法被组装到四种模块中。这四种模块分别关于结构、单元、截面及纤维。每一模块种描述基本变量的向量和矩阵概况在表 4.1 中。

在结构分析阶段每一个模块都是给定数据、模块计算和返回需要变量值的集合，如第 2 章和第三章末尾的流程图总结所示。在结构模块中，施加的力增量组成给定的输入数据，求解算法返回结构位移的增量和总值、对应的抗力及当前的刚度矩阵。在单元模块中，单元变形总量和增量表示输入数据，求解算法返回对应的单元抗力和当前的刚度矩阵。在截面模块中，为了强调所提出的用于单元状态确定的算法的基于柔度的性质，输出数据包括截面的柔度 $f(x)$ 而不是截面刚度 k(x)。四种模块的输入和输出变量概况在表 4.2 中。

Module	Vectors and Matrices		
	Force/Stress	Displacement/Deformation	Stiffness/Flexibility
Structure	$\mathbf{P}$	$\mathbf{p}$	$\mathbf{K}$
Element	$\boldsymbol{Q}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{F}, \boldsymbol{K}$
Section	$\boldsymbol{D}(x)$	$\boldsymbol{d}(x)$	$\boldsymbol{k}(x), \boldsymbol{f}(x)$
Fiber	$\boldsymbol{E}(x)$	$\boldsymbol{e}(x)$	E_{tan}

表 4.1　定义每一模块状态的向量和矩阵

Module	Input	Output
Structure	Applied force increments $\Delta\mathbf{P}_E$	Total displacements $\mathbf{p}$ Displacement increments $\Delta\mathbf{p}$ Resisting forces $\mathbf{P}_R$ Stiffness $\mathbf{K}$
Element	Total deformations $\boldsymbol{q}$ Deformation increments $\Delta\mathbf{q}$	Resisting forces $\boldsymbol{Q}$ Stiffness $\boldsymbol{K}$
Section	Force increments $\Delta\boldsymbol{D}(x)$	Residual deformation $\boldsymbol{r}(x)$ Flexibility $\boldsymbol{f}(x)$
Fiber	Total strains $\boldsymbol{e}(x)$ Strain increments $\Delta\mathbf{e}(x)$	Resisting stresses $\boldsymbol{E}(x)$ Stiffness E_{tan}

表 4.2　每一模块的输入与输出数据

非线性求解算法组装在三个嵌套计算循环中。以加载步骤顺序施加荷载，表示成上标 k，使得每一个荷载增量表示成向量 ΔP_E^k。总施加荷载 P_E 等于荷载增量 ΔP_E^k 的总和。

$$\boxed{\mathbf{P}_E = \sum_{k=1}^{nk} \Delta\mathbf{P}_E^k}$$

由于存在非线性结构行为，引进一种将结构当前状态线性化方法，用迭代方案计算由每一加载步骤中施加的总荷载 $P^k = P^{k-1} + \Delta P^k$ 引起的结构位移 p^k。为此在独立计算程序和 FEAP 程序中采用 Newton-Raphson 算法，尽管一些替代策略对后者是很有效的而且易于实现。另一个标注 i 用于表示 Newton-Raphson 求解方法的迭代数。最后，为了确定对应于给定单元变形 q^i 的单元抗力，在每一步 Newton-Raphson 迭代中要用到第三个迭代循环。对应地，引进了第三个上标 j。

从以上讨论中，很清楚为了得到结构自由度的收敛解需要在每一加载步骤 k 中用到两个嵌套循环。在收敛状态下，求解算法在单元中严格满足平衡性和协调性，而所有截面状态在指定容差内满足截面力-变形关系。

在非线性分析中引进一种特殊符合来追踪每一个变量的演化。向量和矩阵用

对应于三个迭代循环的三个上标来表示。例如，单元力向量表示成

$$\left(\left(\mathbf{Q}^k\right)^i\right)^j$$

其中 k 表示加载步骤，i 为 Newton-Raphson 迭代数，j 为单元迭代数。必须指出的是单元、截面和纤维变量带有全部三个上标，而结构变量不带有上标 j，因为它们在单元迭代过程中没有变化。例如，结构位移向量和单元力向量写分别写成

$$\left(\mathbf{p}^k\right)^i \quad \text{and} \quad \left(\left(\Delta\mathbf{Q}^k\right)^i\right)^j$$

这种规律唯一的特例是单元变形向量 q，因为它没有受到单元迭代循环的影响所以不带标注 j（图 2.5)。

有限元程序中梁柱单元的数值实现紧密遵循第 2 章和第 3 章中的步骤轮廓。另外，因为在迭代过程中每一个向量都有变化，所以需要引进向量增量。例如，$(\delta\Delta p^k)^i$ 表示第 i 步 Newton-Raphson 迭代中结构位移增量的变化，而 $(\Delta p^k)^i$ 表示在第 k 步加载中结构位移总增量，写成

$$\left(\Delta\mathbf{p}^k\right)^i = \left(\Delta\mathbf{p}^k\right)^{i-1} + \left(\delta\Delta\mathbf{p}^k\right)^i$$

其中 $(\Delta p^k)^{i=0} = 0$。一旦结构自由度达到收敛，丢掉上标 i，总位移增量简单变成 Δp^k，而总结构位移更新为

$$\mathbf{p}^k = \mathbf{p}^{k-1} + \Delta\mathbf{p}^k$$

类似地，$((\delta\Delta Q^k)^i)^j$ 表示第 j 步单元迭代中单元力增量的变化，$((\Delta Q^k)^i)^j$ 表示在第 i 步 Newton-Raphson 迭代中单元力总增量，写成

$$\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^k\right)^i\right)^j = \left(\left(\Delta\mathbf{Q}^k\right)^i\right)^{j-1} + \left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^k\right)^i\right)^j$$

其中 $((\Delta Q^k)^i)^0 = (\Delta Q^k)^{i-1}$，$((\Delta Q^k)^1)^0 = 0$。当单元迭代达到收敛时，去掉上标 j，$((\Delta Q^k)^i)^j$ 变成 $(\Delta Q^k)^i$。类似地，当结构自由度达到收敛时，去掉上标 i，$(\Delta Q^k)^i$ 变成 ΔQ^k。在这点单元力更新为

$$\mathbf{Q}^k = \mathbf{Q}^{k-1} + \Delta\mathbf{Q}^k$$

其中 $Q^0 = 0$。

应该注意的是，表示成符号 $\delta\Delta$ 的向量增量变化只用于更新在迭代过程中对应的向量增量和总向量，因此不必存储它们。

非线性求解算法的综述已经表述在第 2 和第 3 章末尾，注意为了清楚表达，省略了所有上标。附录 A 包括了详细的求解算法综述，其中有更新过程的轮廓及一些实现问题的简单讨论。

4.3 数值积分

单元公式所有积分都采用 Gauss-Lobato 积分方案进行数值计算，基于表达式

$$I = \int_0^L f(x)\cdot dx = \sum_{h=1}^{m} w_h \cdot f(x_h) \qquad (4.1)$$

其中 h 表示监控截面，w_h 为对应的重量系数。有 m 个积分点的 Gauss-Lobato 方案允许精确积分的多项式次数达到（2m-3）。当把单元端点包括进积分很重要时，这个过程就比经典的高斯积分方法更好。由于梁柱单元的塑性特征常常出现在构件的端部，从精确度和数值稳定性方面看，对单元端部截面的监控就更有优势。

4.4 容差的定义

本研究中非线性求解算法是基于一组不断使用直至达到收敛的线性矩阵关系。在理论上，这种情况只发生在当施加的荷载完美地被单元内部抗力平衡时。然而，在数值上，这种完美的平衡是不可能的或是需要花费太多去达到。在非线性求解算法中，通常只要一些控制参数比如非平衡力，比指定的临界值或容差小就可以说达到收敛了。像至今所讨论过的许多研究，这些变量的平均值或绝对值可能被选作控制参数。独立程序比 FEAP 程序中单元的实现更可能选择不同的控制参数，后者容差参数的选择被主程序所限制。独立程序中采用两种不同的迭代算法：第一个实现在结构水平上，即著名的 Newton-Raphson 方案，而第二个应用于单元水平上，如前面章节所述。对应地，需要两种收敛控制准则。本研究中，选择在结构自由度和单元控制截面中的不平衡力作为控制参数。两种容差定义为：第一个是绝对的力界限，第二个为相对的力界限，即对应总施加的力的分数比值。不平衡力与两种界限的最大值进行比较。这种选择是考虑到对于大的施加荷载，绝对容差太严格，而对于小荷载，相对容差也许太过严格。由于该求解算法的稳定性不受到加载步增加大小的影响，所选择的收敛准则在加载步太小或太大的极端情况下不显得过分严格。下面分别讨论单元和结构水平上的收敛准则。

（a） 单元收敛。当监控截面收敛时，达到了单元水平上的收敛。当所有截面力不平衡处在绝对或相对容差以内，就达到了截面收敛。每一个监控截面 h 定义三种广义力，即两个弯矩 $D_1(x_h)$，$D_2(x_h)$ 和轴力 $D_3(x_h)$，如图 2.1 所示。对所有的单元定义两个单元容差值，它们是：

ERT 和 EAT 通过用户选择的比例因子与对应的结构容差 SRT 和 SAT 相联系，这将在这节后面部分讨论。在每一步单元迭代 j 中，定义三种不同的截面容差值

$SeT_n(x_h)$：

$$SeT_n(x_h) = \max\left\{EAT \times L, \left(\left(D_n^k(x_h)\right)^i\right)^j \times ERT\right\} \qquad n = 1,2$$

$$SeT_n(x_h) = \max\left\{EAT, \left(\left(D_n^k(x_h)\right)^i\right)^j \times ERT\right\} \qquad n = 3$$

其中 L 表示单元长度。在计算机程序中，引进单元计数器 EC 来监控小于对应容差的力不平衡的数量。在单元迭代过程中，首先把计数器置为 0，然后随着每次截面力满足截面容差逐步增加，也就是：

$$\left(\left(D_{nU}^k(x_h)\right)^i\right)^j \leq SeT_n(x_h) \quad \Rightarrow \quad EC = EC + 1$$

当所有监控截面已经收敛，也就达到了单元收敛，或用符合表示当

$$EC = 3m \quad \Rightarrow \quad element\ convergence$$

其中 m 为单元中监控截面的数量。这时完成了迭代循环 j。在所有单元收敛后，完成单元状态确定，程序检查结构水平上的收敛性。

（b）结构收敛。当所有节点不平衡力小于对应的容差时，达到了结构水平上的收敛。收敛检查类似于单元中所采用的方法。在输入数据中指定绝对和相对容差：

$$SAT = Structure\ Absolute\ Tolerance$$

$$SRT = Structure\ Relative\ Tolerance$$

SRT 典型地被指定为 0.01，而 SAT 取决于要解决问题的类型。对每一个自由度 ndof，计算容差

$$StT_{ndof} = \max\left\{SAT, \left(P_n^k\right)^i \times SRT\right\} \qquad ndof = 1, \ldots, maxdof$$

其中 maxdof 为无约束自由度的总数。引进结构计数器 SC 来监控收敛的自由度的数量。计数器在每一步 Newton-Raphson 迭代 i 的开始时初置为 0，随着每次结构不平衡力小于对应的容差逐步增加，也就是

$$\left(P_{U\,ndof}^k\right)^i \leq StT_{ndof} \quad \Rightarrow \quad SC = SC + 1$$

当计数器等于无约束自由度的总数时，达到结构收敛，即：

$$SC = maxdof \quad \Rightarrow \quad structure\ convergence$$

当结构收敛时，完成了 Newton-Raphson 循环，施加下一个荷载增量。
结构和单元容差通过容差因子 TF 联系，比如

$$\boxed{\begin{array}{l} EAT = TF \times SAT \\ ERT = TF \times SRT \end{array}}$$

TF 的默认值为 1。当 TF 增大时，单元迭代步数 j 逐渐减小趋近于限值 1。相反，当 TF 减小时，迭代步数 j 增加。当荷载增量很小时，Newton-Raphson 迭代很少有必要达到结构水平上的收敛，因为在每一步加载中，刚度变化很小。所以，在单元收敛性检查中没有必要太过严格，系数 TF 比 1 大，典型值取 5 到 10 之间。另一方面，当荷载增量很大时，在每一步加载中刚度发生很显著的变化，若干 Newton-Raphson 迭代要求收敛于解答值。在这种情况下，通过选取接近于 1 的 TF 值在单元水平上紧密跟踪应力应变关系很重要。换而言之，TF 系数控制了每一步 Newton-Raphson 迭代 i 中迭代步数 j 和每一步加载中 Newton-Raphson 迭代总数的关系。

在程序 FEAP 中收敛准则是不同的。在结构水平上选择能量增量作为收敛控制参数。当当前能量增量与初始能量增量比值小于指定容差时，Newton-Raphson 迭代算法收敛。使用采取的标注方法，结构收敛准则表示为：

$$\frac{\left\{\left[\left(\Delta \mathbf{P}_E^k\right)^i\right]^T \cdot \left(\delta\Delta \mathbf{p}^k\right)^i\right\}}{\left\{\left[\left(\Delta \mathbf{P}_E^k\right)^1\right]^T \cdot \left(\delta\Delta \mathbf{p}^k\right)^1\right\}} = \frac{\left\{\left[\left(\mathbf{P}_U^k\right)^{i-1}\right]^T \cdot \left(\delta\Delta \mathbf{p}^k\right)^i\right\}}{\left\{\left[\left(\Delta \mathbf{P}_E^k\right)^1\right]^T \cdot \left(\delta\Delta \mathbf{p}^k\right)^1\right\}} \le Stol \qquad (4.2)$$

典型地，Stol 默认指定为10^{-16}。这种收敛方案是 FEAP 程序中的一部分且在当今应用中完全独立。关于收敛准则的更多细节在 Zienkiewicz 和 Taylor（1989 与 1991）里找到。

在程序 FEAP 梁柱单元的实现中，应用收敛准则来检查在单元迭代循环中是否收敛。当前单元迭代 j 步的能量增量值与首次单元迭代的能量即 j=1 时进行比较。用符合表示为：

$$\frac{\left\{\left[\left(\left(\delta\Delta \mathbf{Q}^k\right)^i\right)^j\right]^T \cdot \left(\left(\delta\Delta \mathbf{q}^k\right)^i\right)^j\right\}}{\left\{\left[\left(\left(\delta\Delta \mathbf{Q}^k\right)^i\right)^1\right]^T \cdot \left(\delta\Delta \mathbf{q}^k\right)^i\right\}} = \frac{\left\{\left[\left(\left(\mathbf{s}^k\right)^i\right)^{j-1}\right]^T \cdot \left(\left(\mathbf{K}^k\right)^i\right)^{j-1} \cdot \left(\left(\mathbf{s}^k\right)^i\right)^{j-1}\right\}}{\left\{\left[\left(\delta\Delta \mathbf{q}^k\right)^i\right]^T \cdot \left(\mathbf{K}^k\right)^{i-1} \cdot \left(\delta\Delta \mathbf{q}^k\right)^i\right\}} \le Etol \quad (4.3)$$

典型地，Etol 默认指定为10^{-16}。由于此准则既控制不平衡力也控制残余变形，所以它比在独立程序中应用的准则具有明显的优势。当单元达到它的限制峰值时，这就非常明显了，其刚度矩阵变得变态。在这种情况下，不平衡力很小而单元残余变形依然很大。因此，基于残余变形的单元迭代不应停止。能量只是对不平衡力和残余变形的一种量度。

独立程序和 FEAP 中单元收敛准则另一个显著区别在于前者单元收敛是基于截面收敛，而后者则完全基于单元力和变形，含蓄地假定单元自由度的收敛暗示截面收敛。为了使这种假定生效，在 FEAP 的单元实现中也引进了另一个收敛准

则。在第三个准则中，通过测量能量增量而不是不平衡力来在截面水平上检查收敛性。在这种情况下，当满足以下条件时达到了收敛：

$$\frac{\sum_{i\sec=1}^{n\sec}\left\{\left[\left(\left(\mathbf{r}^{k}\left(x_{i\sec}\right)\right)^{i}\right)^{j}\right]^{T}\cdot\left(\left(\mathbf{k}^{k}\left(x_{i\sec}\right)\right)^{i}\right)^{j}\cdot\left(\left(\mathbf{r}^{k}\left(x_{i\sec}\right)\right)^{i}\right)^{j}\right\}}{\sum_{i\sec=1}^{n\sec}\left\{\left[\left(\left(\delta\mathbf{d}^{k}\left(x_{i\sec}\right)\right)^{i}\right)^{1}\right]^{T}\cdot\left(\left(\mathbf{k}^{k}\left(x_{i\sec}\right)\right)^{i}\right)^{0}\cdot\left(\left(\delta\mathbf{d}^{k}\left(x_{i\sec}\right)\right)^{i}\right)^{1}\right\}}\leq Etol$$

在对单元实现测试阶段，方程（4.3）和（4.4）中的收敛准则被证明是等效的。因此，本研究选择方程（4.3）中只基于在单元水平上的能量的收敛准则，因为这可以缩短计算时间。

4.5 单元荷载的应用

本节表述一种基于梁柱单元柔度中单元荷载应用的新方法。在线弹性范围内，刚度和柔度方法产生相同的结果，使得计算基于位移形函数的等效节点力已建立的方法得以应用。然而在非线性范围，在两种情况下应用不同的方法。本研究为施加节点力提出的方法遵循的非线性求解算法。在独立程序中单元只包含均布荷载情况。这些应用于对应 k=1 的首次加载过程中。在程序 FEAP 中包括了不同的单元荷载分布。

单元荷载的应用比节点荷载更复杂，因为它要求显含刚体位移模式。因为刚体位移模式对于单元公式是不必要的，所以至今未考虑刚体位移模式。它们暗含在方程（2.28），（2.43）和（2.44）的转换矩阵 L_{ele} 中，转换矩阵把整体参考系中的单元位移 P 转换成局部参考系中的单元变形 q。只能通过包含刚体位移模式来解释在单元中横向单元荷载引起剪力的事实。在单元荷载应用中刚体位移模式的作用归纳成不同的方面。本节描述了在独立程序中的原始实现，而简单讨论了在程序 FEAP 中应用的方法。

单元荷载的应用过程包括以下几个步骤。为简便起见，假设结构处于初始无应力状态，即无应力单元和截面和不存在节点荷载。由加载在简单支撑梁上的静力荷载的应用引起的弯矩图和轴力图作为在非刚体位移模式无应力单元截面中的力增量。这些截面力引起沿单元积分产生对应单元变形的截面变形。后者违反了在结构水平上的协调条件，此时对于外部零荷载单元位移和变形等于 0。修正过的力需要施加于构件端部以使得单元变形等于 0，这在非线性单元状态确定算法中是准确的。对在所施加的单元荷载下的非线性单元特性，在单元中不断迭代直至达到收敛。依据收敛性，计算单元抗力和检查结构自由度平衡性。由于不存在外部荷载，在结构自由度上单元抗力违反了平衡性，等效节点荷载应反方向施加在结构上。因此，这些节点力处理成结构不平衡荷载。从这点开始以下过程与节点荷载应用相同。对在所施加的单元荷载下的非线性特征，Newton-Raphson 迭代有必要达到结构收敛的状态。在初始加载的最后，单元中弯矩不是线性分布，这是由施加单元荷载后的一般非线性力分布和由节点荷载修正后的线性弯矩分布叠加产生的。如果在首次加载时没有在结构上施加节点荷载，结构最终状态为

节点力为 0 而由于施加单元荷载节点位移不为 0。

单元荷载的应用中刚体位移模式很重要。没有刚体位移模式的梁柱单元如图 2.1 所示。当包含刚体位移模式，出现五种额外的自由度，如图 4.1 所示，还有关联力$\bar{Q}$和相对局部参考轴的位移$\bar{q}$。在 Newton-Raphson 迭代 i 中检查收敛性前，增加刚体位移模式。从平衡性考虑，首先将 Q 扩展到$\bar{Q}$，然后将由单元荷载引起的附加自由度上的力加入$\bar{Q}$中。对刚体位移模式的总结将在本节后面通过一个简单例子来阐明。

本报告将对单元荷载的讨论局限在沿整个单元荷载均匀分布及距离左端x_p有一个集中荷载的情况，提出的方法很通用，可以很容易地推广到其他荷载类型和分布中。在均布荷载下，单元荷载给分组在一个由沿 x,y,z 方向上每单位长度上的荷载组成的向量上。

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} w_x & w_y & w_z \end{bmatrix}^T \tag{4.5}$$

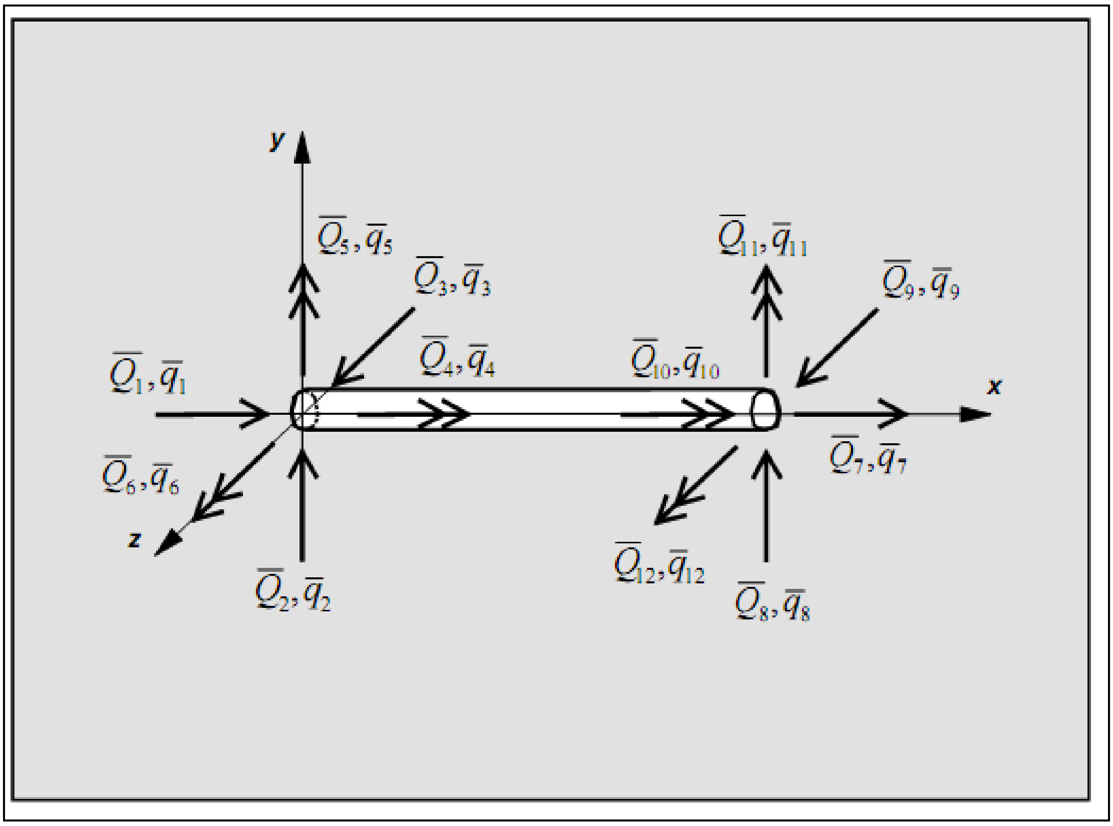


图 4.1　　具有刚体位移模式的梁柱单元

单元荷载的应用的步骤顺序这里用附录 A 的编号方案阐述。分析过程中单元荷载的总结在第一步加载中完成，也就是 k=1。为了清晰起见，假定在第一步加载中没有其他的外部荷载施加在结构上。除了附录 A 中的步骤外，需要其他一些步骤来包含单元荷载，如下：

（1）开始分析

置 k=1

（2）开始 Newton-Raphson 迭代。

置 i=1

（3）求解方程的整体系统，更新结构位移增量。

在 k=1 和 i=1 时，没有外部荷载增量施加在结构上，使得

$$\boxed{\begin{gathered}\Delta \mathbf{P}_E^1 = \mathbf{0} \\ \left(\mathbf{P}_U^1\right)^1 = \mathbf{0} \\ \left(\delta\Delta \mathbf{p}^1\right)^1 = \mathbf{0}\end{gathered}}$$

（4）计算单元变形增量。

从方程（A.3）计算单元变形增量变化$(\delta\Delta q^k)^i$，根据方程（A.4）更新单元变形增量$(\Delta q^k)^i$。对 k=1 和 i=1，$(\delta\Delta q^1)^1$=0。

（5）开始单元状态确定。置 j=1。

（6）计算单元力增量变化。

（7）更新单元力增量和单元抗力。

（8）计算截面力增量。

在一般情况下，用方程（A.9）计算截面力增量$((\delta\Delta D(x)^k)^i)^1$。当 k=1，i=1 和 j=1 时，计算由施加的单元荷载引起的截面力增量

$$\left(\left(\delta\Delta \mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1 = \mathbf{b}_g(x)\cdot \mathbf{W} \tag{4.6}$$

其中$b_g(x)$为联系不含刚体位移模式的梁中的所施加荷载 W 与单元力的力转换矩阵。更多关于$b_g(x)$的细节在本节后面部分介绍。

（9）计算截面变形增量的改变

用方程（A.12）计算截面变形增量的改变$\boxed{\left(\left(\delta\Delta \mathbf{d}^1(x)\right)^i\right)^j}$，用方程（A.13）修改截面变形增量$\boxed{\left(\left(\Delta \mathbf{d}^1(x)\right)^i\right)^j}$。当 k=1、i=1 且 j=1 时，截面变形增量$\boxed{\left(\left(\Delta \mathbf{d}^1(x)\right)^1\right)^0}$不会改变，所以$\boxed{\left(\left(\Delta \mathbf{d}^k(x)\right)^1\right)^1 = \mathbf{0}}$。

（10）计算纤维变形增量

（11）计算纤维应力和当前的切线模量

（12）计算截面的切线刚度和柔度矩阵
（13）计算截面的抵抗力
（14）计算截面的非平衡力
（15）计算截面的残余变形

用方程（A.21）计算截面残余变形 $\boxed{\left(\left(\mathbf{r}^{1}(x)\right)^{i}\right)^{j}}$。

当 k=1、i=1 且 j=1 时，截面非平衡力等于 0。根据方程(4.6)中的应用单元荷载，截面残余变形 $\boxed{\left(\left(\mathbf{r}^{1}(x)\right)^{1}\right)^{1}}$ 等于截面变形增量 $\boxed{\left(\left(\delta\mathbf{d}^{1}(x)\right)^{1}\right)^{1}}$：

$$\boxed{\left(\left(\mathbf{r}^{1}(x)\right)^{1}\right)^{1}=\left(\left(\delta\mathbf{d}^{1}(x)\right)^{1}\right)^{1}}$$

截面变形从部分截面残余变形而来，因为他们和（4）中单元的最后变形等于 0 不一致。
（16）计算单元的柔度和刚度矩阵
（17）检查单元的收敛性

当 i=1 且 j=1 时，收敛准则没有满足。

a) 达到收敛：用平衡因素 $(\mathbf{Q}^{k})^{i}\Rightarrow(\bar{\mathbf{Q}}^{k})^{i}$ 增加刚体位移模式到单元抵抗力上。然后叠加单元荷载的影响：

$$(\bar{\mathbf{Q}}^{k})^{i}=(\bar{\mathbf{Q}}^{k})^{i}+\mathbf{t}_{g}\cdot\mathbf{W}$$

其中，$\mathbf{t}_{g}$ 是一个依赖于单元荷载 W 的转换矩阵，稍后会详细说明。跳到（18）。

b) 没有达到收敛性：用方程（A.24）计算单元残余变形 $\left(\left(\mathbf{s}^{k}\right)^{i}\right)^{j}$，j 增大 1，然后跳到（6）。
（18）计算结构的抵抗力和新的结构刚度矩阵

结构抵抗力向量由包含刚体位移模式的单元抗力向量 $\left(\bar{\mathbf{Q}}^{k}\right)^{i}$ 的集合决定。

$$\left(\mathbf{P}_{R}^{k}\right)^{i}=\sum_{ele=1}^{n}\left(\bar{\mathbf{L}}\right)_{ele}^{T}\cdot\left(\bar{\mathbf{Q}}^{k}\right)_{ele}^{i}$$

（19）计算结构的非平衡力
（20）检查结构的收敛性
（21）修改作用力和变形向量，完成步骤 k=1。

因为这个总结没有包含结点荷载，所以分析只包含一个荷载步 k=1。如果有随时间改变的结点荷载，分析应该包括除单元荷载影响的第一步外的荷载步。这个讨论局限于在第一步荷载步中与时间独立的单元荷载。对于和时间有关的单元荷载，上面的程序应该在每一个荷载步重复。

分别在方程（4.6）和（4.8）中的作用力转换矩阵 $\mathbf{b}_g(x)$ 和 $\mathbf{t}_g$ ，依赖于单元荷载向量 W。方程（4.5）给出了均布荷载 W 的情况，转换矩阵为：

$$\mathbf{b}_g(x)=\begin{bmatrix} 0 & \frac{L}{2}x(x-L) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{L}{2}x(L-x) \\ L-x & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.10}$$

$$\mathbf{t}_g^T=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -L \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{L}{2} & -\frac{L}{2} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

集中荷载作用于离梁左边结点 x_P 的情况，单元荷载向量包含和三个局部坐标有关的荷载分量：

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} P_x & P_y & P_z \end{bmatrix}^T$$

相应的转换矩阵 $\mathbf{b}_g(x)$ 和 $\mathbf{t}_g$ 为：

$$\mathbf{b}_g(x)=\begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{x_P}{L}-1\right)\cdot x & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\frac{x_P}{L}\right)\cdot x \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad 0\le x<x_P \tag{4.13}$$

$$\mathbf{b}_g(x)=\begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{x}{L}-1\right)\cdot x_P & 0 \\ 0 & 0 & \left(1-\frac{x}{L}\right)\cdot x_P \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{for} \quad x_P\le x\le L \tag{4.14}$$

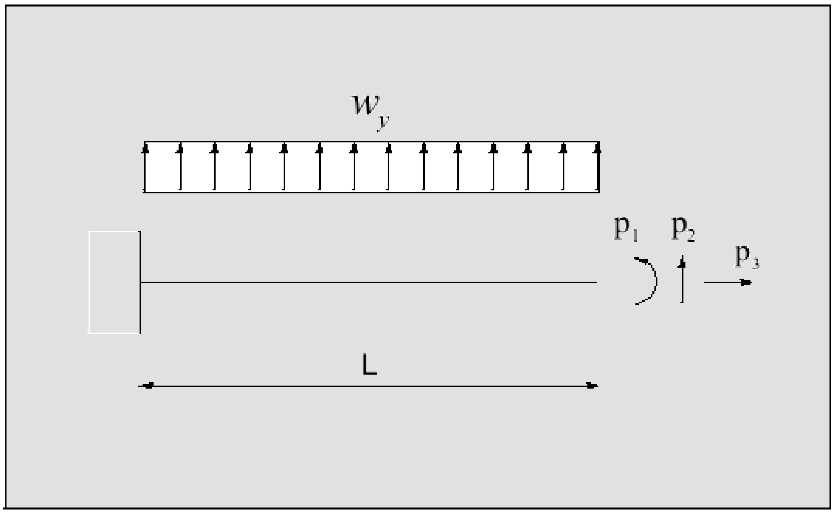


FIGURE 4.2 CANTILEVER WITH UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD

$$\mathbf{t}_g^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\dfrac{x_p}{L}-1\right) & \left(-\dfrac{x_p}{L}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\dfrac{x_p}{L}-1\right) & \left(-\dfrac{x_p}{L}\right) & 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

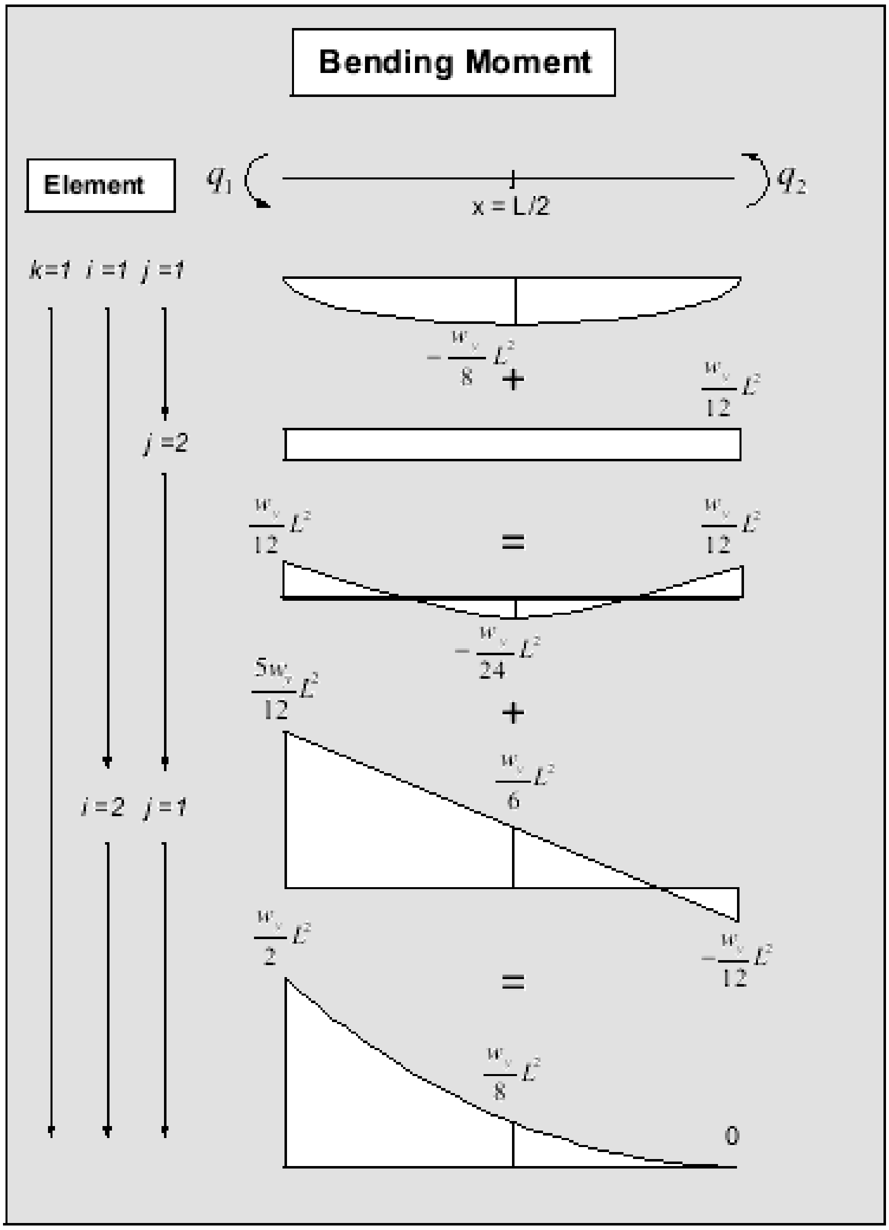


FIGURE 4.3 CANTILEVER WITH UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD: BENDING MOMENT HISTORY

如图 4.2 所示，是一个线弹性悬臂在均布荷载 W_y 作用下 **Y** 方向单元荷载的施加过程。该结构在悬臂尖端有 3 个自由度。单元是线弹性的，具有均匀横截面和均匀截面刚度。

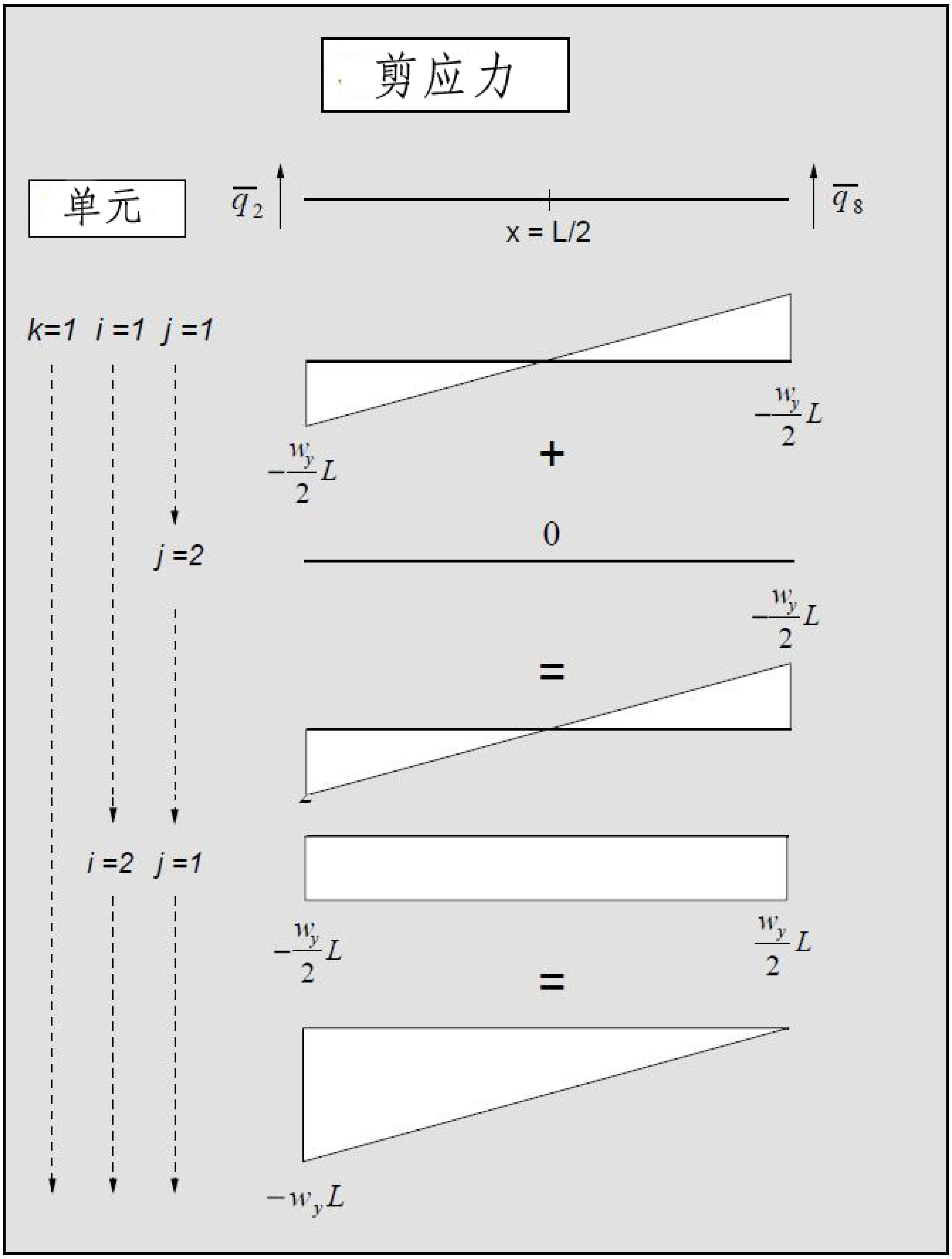


图 4.4 悬臂在均匀分布荷载作用下的剪应力时程

根据施加的荷载情况及结构处于线弹性性能，故轴向自由度 p_3 为 0，即只包含有两个自由度 p_1 和 p_2。如图 4.3 和图 4.4 所示，单元中弯矩应力和剪应力分布的变化作为迭代计算中荷载步 *k=1* 的过程。

单元的首次迭代计算时，相应的 *k=1*、*i=1* 和 *j=1*，根据公式 4.6 有呈抛物线分布弯矩图对应的是一根承受均布荷载的简支梁。通过公式 4.7 把相应的截面变形变换为其残余变形，并通过公式 A.24 来沿整个单元把这种截面变形整合积

分，使其收敛于单元的残余应变。这种残余应变作为单元的应变增量是用于接下来的迭代计算，相应的 *k=1*、*i=1* 和 *j=2.* 最后通过公式 A.6 把单元应变转换为单元应力增量。对于线弹性单元，其单元应力增量易知是固端弯矩 $W_yL^2/12$. 此刻单元是收敛的，且它的弯矩图对应的是两端固支承受均布荷载的梁。根据公式 4.8，为了完备刚体运动模式，我们给单元抗力 $\bar{Q}$ 添加了两个竖向力 $W_yL/2$，且在结构层面上满足平衡性。由于没有外荷载作用在结构上，现在在悬臂的自由末端就作用有一个大小为 $W_yL^2/12$ 不平衡弯矩和一个大小为 $W_yL/2$ 的不平衡剪力。在下一次 Newton-Raphson 迭代计算时，相应的 *k=1* 和 *i=2*，为了重新建立结构自由度中的平衡需要在结构上反向施加等效的节点荷载。如图 4.3 所示，也就是说在单元的第一次 Newton-Raphson 迭代计算过程中，其相应的 *k=1*、*i=2* 和 *j=1*，我们在悬臂现有的弯矩上叠加一个线性分布的弯矩来实现上述这种平衡。由于悬臂是线弹性的，单元收敛能够很快得以实现。当结构层面上也达到了收敛时，就认为分析完成了。最终的弯矩图就是我们熟知的如图 4.3 所示的抛物线了。本例中全部单元和结构的矢量推导的详细过程参考附录.B。

这里选取的例子非常简单，因为单元是线弹性且是均匀截面。然而，该单元荷载的施加过程是普遍适用的，即能够适用于任意材料性能和任意单元荷载分布的情况。一般来说，当单元具有非线性材料特性和不均匀截面性质时，不管是在单元层面还是结构层面，为了满足在单元荷载作用下的平衡性和协调性要求，需要采用更多次的迭代计算。

在程序 **FEAP** 中，采用与上述同样的过程来实现 beam-column 单元的应用，但是用了不同的方法完备其刚体运动模式。在独立程序中，零应力状态是由于单元荷载施加在结构的自由度上，以致在收敛计算过程中没有应力作用于结构节点上。换句话来说，就是把单元荷载看作为其最初的应力分布。在程序 **FEAP** 中，当通过公式 4.8 完备了单元的刚体运动模式时，认为由单元荷载的施加产生的剪切应力是作用在结构自由度上的应力。过程中的残数与先前推导出来的一致，只可惜现在没能考虑公式 4.8. 该替换方案非常类似于一般的基于刚度法单元的过程，即类似的有其单元荷载被等效的转换为节点荷载。

均匀荷载作用下的线弹性悬臂在程序 **FEAP** 模拟实施过程中，在首次迭代计算过程（*k=1*、*i=1* 和 *j=1*）中，由于竖向力 $\left(P_2^1\right)^1$ 作用而产生的悬臂末端 $\left(\left(\delta\Delta Q^1\right)^1\right)^1$ 位移是非零的。简支梁在均布荷载作用下的抛物线弯矩图叠加上线性的弯矩图从而产生非零的末端位移 $\left(\left(\delta\Delta Q^1\right)^1\right)^1$. 在一个现有的有限元程序中，这么一个小的改变使单元荷载的实施过程更为容易。

4.6 钢筋混凝土构件的材料软化和卸载

我们当前研究的建议采用的非线性求解过程特别适用于模拟钢筋混凝土构件的软化行为。即使在此建议的算法只是应用于一个纤维 beam-column 单元行为描述，但是该过程同样适用于具有任意连续非线性或逐段线性的截面“应力-应变”关系的结构构件。Spacone 等人于 1992 年对在不同的“弯矩-曲率”关系情况下该模拟方法的实现已进行了论述。该方法也能够推广应用于其他类型的系统的非线性分析。对于若干个组分串联或并联（包括同时有串联和并联）构成的系统，把上述理论扩展到其预应力混凝土构件的非线性分析中的粘结或非粘结、内部或外部的“钢筋束”的分析是目前另一个有待研究的课题。

在关于软化效应的讨论中，强调“整个结构的软化”和“一个正在刚化的结构中某些构件的软化”之间的区别是非常重要的。整个结构的软化在数值分析上是非常难以实现模拟的，并且对它来说一般的 Newton-Raphson 迭代法是不适用的。在此例的分析中，需要采用特别的迭代计算方案，如：弧长法；或者是通过特定的过程来处理，如：位移控制分析；但是，这样的讨论研究已经超出了现有研究的范围，因此难以实现。

结构的非线性分析中的状态判定过程涉及到结构单元的末端位移。因此，就计算机实现上来说，描述单元在位移控制条件下的软化响应会比描述结构的软换响应相对容易。即便如此，单元软化过程的数值模拟是一个非常复杂的数值问题，就其开发一种可靠的求解方法目前引起越来越多注意，尤其对于在强烈的地面运动下钢筋混凝土结构的响应分析。在强烈的地面振动下，结构中一些构件可能达到了它们的极限承载能力且开始进入强度软化（即塑性变形阶段），此时，单元软化在满足结构整体和局部的延性要求其着重要的作用。当应力重分布可能增强结构侧向极限承载力时，构件软化过程中要求的形变延性可能会很高，以致在结构达到侧向极限承载力之前可能就局部或整体倒塌。

理论上来说，采用柔度法能够完美地模拟钢筋混凝土构件的软化性能。当一个单元在其末端截面呈现出应变软化时，沿着单元方向弯矩减小，并且在没有软化的截面满足平衡而出现卸载现象。根据柔度法，当不作用有单元荷载时沿单元的弯矩分布是线性的。这种软化和卸载行为用经典的基于刚度法的两节点单元来模拟是很困难的，因为其弯曲分布是假定为线性的。在此例中，需要采用若干种单元来近似实际的非线性弯曲分布，但是这样会产生数值困难，这在图 1.9 和章节 1.2.3 讨论过（摘录于 Zeris 和 Mahin(1988)）。两种不同类型单元的列式比较

参照 Spacone 等人的推导过程(1992)。

本例中模拟软化单元时所采用的求解算法首先是从理论上推导，然后再采用一个简单的范例进行说明。在接下来的分析讨论中，采用附加上简单上标 k 来表示当前相应的荷载步。讨论的前提是，当结构要开始第 i 步的 Newton-Raphson 迭代计算时，假定上一次迭代计算中所有单元的刚度矩阵 $\mathbf{K}^{i\text{-}1}$ 是正定的。在新的迭代计算开始之前，将其形变增量$\triangle \mathrm{q}^{i}$ 施加在单元上，所得单元的应力增量 $\left(\delta\Delta\mathrm{Q}^{i}\right)^{j}$ 再通过应力插值函数对截面应力增量 $\left(\delta\Delta\mathrm{D}(\mathrm{x})^{i}\right)^{j}$ 的修正。根据公式 A.12, 截面应力增量 $\left(\delta\Delta\mathrm{D}(\mathrm{x})^{i}\right)^{j}$ 会产生截面形变增量，把它叠加到先前的截面变形上就收敛得到新的总变形 $\left(\mathrm{d}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j}$。我们需要考虑这样一种情况，当对完成新的总变形 $\left(\mathrm{d}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j}$ 进行截面状态判定时发现其中的一个截面发生软化效应，这时其刚度矩阵从正定的 $\left(\mathrm{k}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j-1}$ 变化为负定的 $\left(\mathrm{k}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j}$。这个不平衡应力 $\left(\Delta\mathrm{D}_{U}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j}$ 是正定的，而截面的残余变形 $\left(\mathrm{r}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j} = \left(\mathrm{k}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j} \square \left(\mathrm{D}_{U}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j}$ 也是负定的。通过公式 A.22 和 A.23 进行单元刚度的迭代更新。假定全部单元的整体刚度也是从正定的 $\left(\mathrm{k}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j-1}$ 变化为负定的 $\left(\mathrm{k}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j}$，由公式 A.24 可知在单元的末端产生负定的残余变形 $\left(\mathrm{s}^{i}\right)^{j}$，由公式 A.6 可知新的应力增量 $\left(\delta\Delta\mathrm{Q}^{i}\right)^{j+1}$ 也是负定的。因此，我们发现单元在新的变形 q^{i} 下，它能够抵抗的应力比采用前一步的状态收敛得的刚度预测的要小。对基于应力插值函数而得的负截面应力增量 $\left(\delta\Delta\mathrm{D}(\mathrm{x})^{i}\right)^{j+1}$，采用在单元末端施加负不平衡应力进行修正，其相应的截面形变增量 $\left(\delta\Delta\mathrm{d}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j+1}$ 由公式 A.12 推出。正在软化的截面在先前的第 j 步迭代计算中，其形变增量用正增量 $\left(\mathrm{f}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j} \square \left(\delta\mathrm{D}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j+1}$ 与残余变形 $\left(\mathrm{r}^{i}(\mathrm{x})\right)^{j}$ 的相对大小来表示。值得注意的是，截面抗力的减小是普遍存在的。

单个单元计算收敛于结果，其得到的单元刚度矩阵很可能是负定的。但是，由于结构的刚度矩阵是由所有单元的刚度矩阵组装而成，另外荷载增量也是施加在结构上的。当某个单元出现软化现象时，其结构的刚度矩阵仍然是正定的，故而结构的承载能力有提高。根据负刚度矩阵 K^{i} 乘以正形变增量$\triangle \mathrm{q}^{i+1}$ 计算得负应力增量可知，单元末端处的新形变增量$\triangle \mathrm{q}^{i+1}$ 增大了软化单元内的负应力增量。因此，软化的单元继续在卸载，而此时相对硬化的构件承受了施加的荷载增量的很大一部分。同时，软化的单元成为结构变形的主要来源。

根据上面的简要描述的侧重，这里提及的分析方法中对软化单元不需要进行荷载步上的特殊处理。通过采用特定算法，单元刚度矩阵从正定到负定的变化不被检测出，而且由此产生截面的参量（正或负的形变增量、形变修正值、应力增量、不平衡应力值，以及最后的刚度矩阵和柔度矩阵），在单元层面上也是可适用的。因此，单元的卸载过程也可同样做出处理，从而不需要把荷载步大小或特定计算步减小。

如图 4.5 所示，举了一个简单的例子来说明这里用于分析软化系统所采用的方法的优点。该软化系统由两个拉伸弹簧串联组成。弹簧 A 是线弹性的，而弹簧 B 产生应变软化是双直线线弹性的。易知串联模型中，系统的总变形由各组件变形叠加而得，同时施加在整个系统上的应力等于单元应力总和。对这个两弹簧系统，根据图 4.5 所给出的变量符号，这些条件可写成如下形式：

$$Q = D_{\mathrm{A}} = D_{\mathrm{B}}$$

$$q = q_{\mathrm{A}} + q_{B}$$

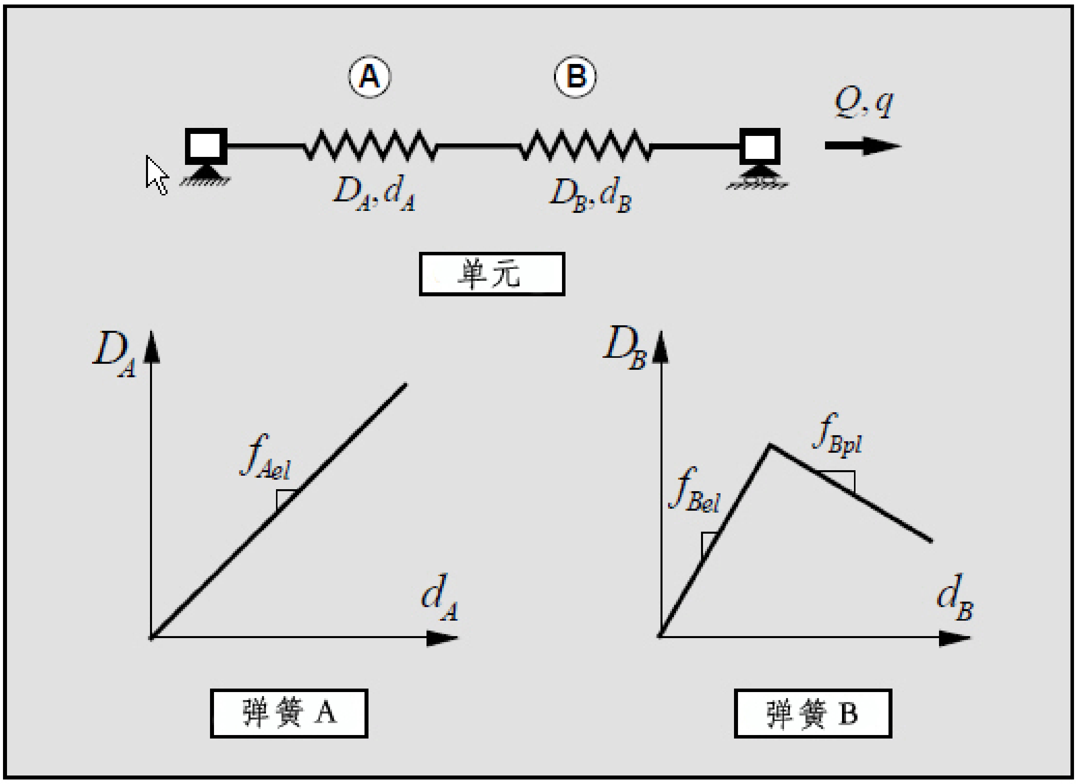


图 4.5 一个简单的软化单元：两弹簧串联模型

容易推导出，系统的弹性模量 F 等于其弹簧弹性模量之和，也就是：

$$F = f_A + f_B$$

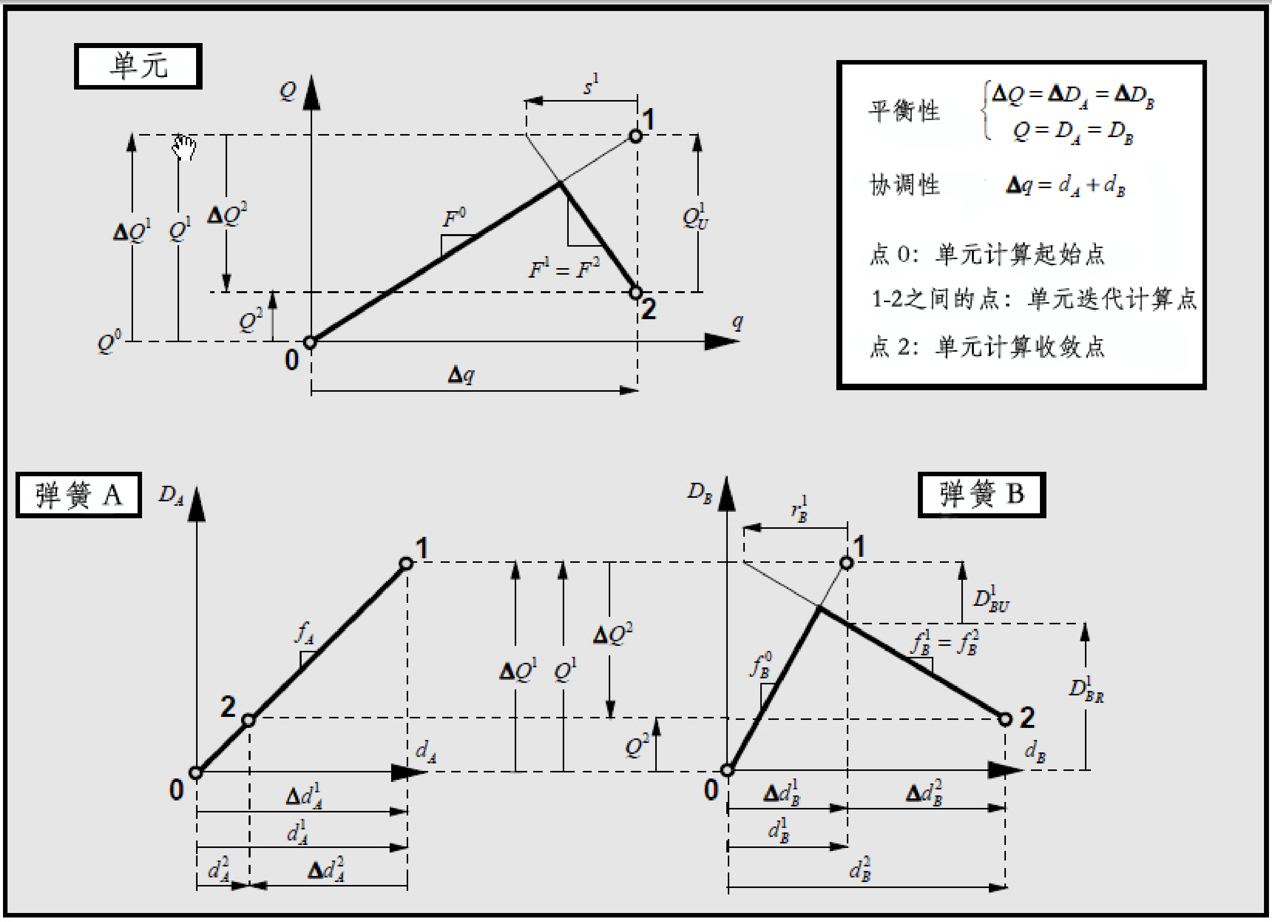


图 4.6 弹簧系统内“力-变形关系”的时程

值得注意的是，这种串联系统和我们现在研究的 beam-column 单元之间存在有类似之处：平衡性条件$Q = D_A = D_B$等价于两个弹簧原件组成的单元内的一个常应力分布，也等价于公式 2.6 所述的 beam-column 单元确定一个线性分布弯矩和一个恒定轴力作用下应力分布。类似的有，对于两个弹簧原件组成的单元，其变形由各组件的变形叠加而得，这就类似于 beam-column 单元的变形是通过对截面变形进行积分求和而得。为了证明这种类似，我们对两弹簧系统施加一个给定的形变增量△q 并观察分析其响应，从而试图求出其相应的抗力增量△Q. 由于这个范例只局限用于单一形变增量的分析且系统性能是分段线性的情况，故这里不需要用上标 k 和 i 来表示。如图 4.6 所示，对仅需要两个单元就能使迭代计算达到收敛的情况给出了一个分析总结，完整的求解过程详见附录 C.

在完成迭代计算分析的过程中，系统的平衡性和协调性是严格满足的，在建议的 beam-column 单元中也是如此。由于系统本构关系实际可看成分段线性的，故弹簧组件的力-位移关系也是严格满足的。然而，事实上并非如此，非线性系统的本构关系只能在有特定的容许误差下满足。

同样值得注意的是，这里采用的分析方法不需要检测出由于相应的第二个

弹簧的刚度变化而产生的位移变化程度。这与遵循“事件-事件”的求解方案不同：对于“事件-事件”的求解方案，求解时其每次刚度的变化都需要描述出来。当然，对每次刚度变化的描述也许能够更好地对系统响应进行描述，但是对一个由很多组件构成的系统而言，为了使其达到收敛所需的事件数目是很大的。例如，对一根有若干控制截面且截面内含有许多纤维的钢筋混凝土柱进行分析，其达到收敛所需事件数是很大的。此时，采用“事件-事件”的求解方案来进行计算机上的实现，其代价是大得离谱的。此外，就一个“事件-事件”的求解方案而言，选取越多的事件数且确定其连续的本构关系，在物理理论上和计算理论上来说，对于分析研究都是有利的。

第五章 应用

5.1 引言

本章中将介绍一系列的例子，用以验证该单元描述钢筋混凝土梁和柱在施加周期荷载和变形时程下的滞回性能的能力。本章中的分析结果通过独立程序 BEAMCOL（采用该 Beam-column 单元的分析程序）获得，该程序数值实现方法在上一章中已经讨论过。

在实验的实施过程中，作用在试验样品的外加荷载是以一种受控方式施加的，并且对挠度和位移的结果进行实时测量。典型地，当构件呈现出相对过刚时，则采用对试验样品的应力控制的试验方法进行实验。而一旦试验样品发生严重破坏和刚度退化，试验会由应力控制转为位移控制，其中依靠认真仔细的加载来模拟出给定的位移时程。在实验的数值模拟中，单一的加载方式必须应用于整个分析过程中，因为大多数有限元分析程序不允许在分析过程中改变边界条件。当构件刚度很高时，应力控制下的数值模拟能够提供良好的结果，但是不能描绘出构件在接近极限承载力时的非线性行为和峰后响应。因此，本章中数值模拟方法的实施是基于位移控制的。

这里选择了三个试验用以验证该 beam-column 单元，它们包括：两个钢筋混凝土悬臂梁试验和一个钢筋混凝土梁-柱试验。第①条试验梁用以研究单个截面的“弯矩-曲率”变化规律和不同测量容许误差限及位移增量对分析结果精确度的影响程度；第②个试验样品是单轴受弯下的悬臂梁；第③个试验样品是一条柱承受两种荷载组合：恒定的轴向力+单轴受弯、恒定的轴向力+双轴受弯（受弯要求为单调的和周期的两种情况）。每种试验中试验样品的模型和材料特性，即已给出混凝土和钢筋的模型材料参数，这里采用的材料参数从现有是混凝土的正方体或圆柱体试块受压实验结果信息中获取。最后，在实验分析中试验样品的荷载和位移时程以及边界条件都是给定的。

本章对第③个试验样品（悬臂柱）采用从单一参数的研究中获得结论。这里的研究目的在于调查研究建议的模型柱中控制截面的数目和单轴压力的存在与否对试验结果的影响程度。当试验柱中控制截面的数量增加时，证实分析结果是否能收敛于精确解这一点是很重要的，如果证实了这一点的话，那么我们的目标就是确定使结果收敛于充分精确的解的柱中控制截面的最小数目。

5.2 单个截面的“弯矩-曲率”关系

Kaba 和 Mahin 在 1983 年提出了一种描述钢筋混凝土构件截面的滞回性能的非线性方法，这种方法在第一章中通过文献调查进行了简要的阐述。他们的模型与 Kent 在 1969 年进行的一条混凝土梁的实验响应相对照。这里采用了同样的实验结果来测试本研究中提及的 Beam-column 单元的性能。图 5.1 和表格 5.1 的总结数据表明该试验也采用了 Kaba 和 Mahin 的对试验样品和其横截面的几何形状离散化的形式。混凝土和钢筋的模型材料参数分别在表格 5.2 和 5.3 做了总结。

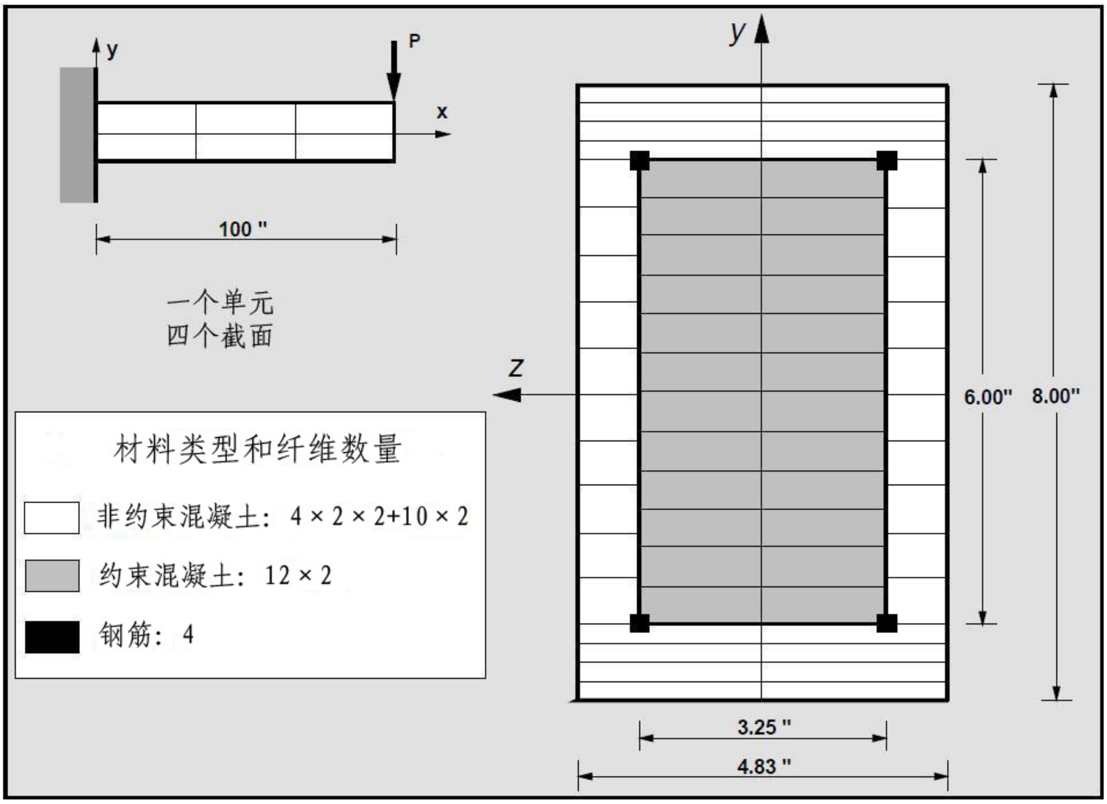


图 5.1 Kent-Beam#24 的结构离散化

Kent-Beam#24				
Beam-column 单元数量= 1				
单元长度=100 in		截面数量= 4		
纤维数量				
截面类型	非约束混凝土	约束混凝土	钢筋	总计

I	18×2	12×2	4	64

表 5.1 Kent-Beam#24 离散化

混凝土材料特性				
混凝土类型	$E_C\left[\text{ksi}\right]$	$f_C^{'}\left[\text{ksi}\right]$	ε_0	ε_u
非约束混凝土(I)	3605	-6.95	-0.0027	-0.00292
约束混凝土(I)	3605	-6.95	-0.0027	-0.03810

表 5.2 混凝土材料特性

钢筋材料特性			
钢筋类型	$E_S\left[\text{ksi}\right]$	$f_y\left[\text{ksi}\right]$	应变硬化率
钢筋类型 I (I)	29,000	48.4	0.0042

表 5.3 钢筋材料特性

我们在这根悬臂梁的自由末端施加竖向荷载，研究内置截面的“弯矩-曲率”关系。从图 5.2 中看出，Kent 的实验结果和分析的结果都是采用了 Kaba-Mahin 模型。这个例证同样是用来研究容许误差测量和位移增量大小对分析结果精确性的影响。

本章中列出的例证，结构和单元的容许误差是完全等效的，它意味着单元与结构之间的转换因子 *TF*=1（参数 *TF* 是在章节 4.4 中引入的联系结构和单元容许误差的参数）。因此，在本章剩于部分将采用最一般形式的容许误差。在对 Kent 的悬臂梁的分析中选择采用 3 套容许误差的衡量值，如图 5.1 所示。回想章节 4.4 中 *EAT* 和 *ERT* 分别表示“单元绝对误差”和“单元相对误差”，3 套容许误差衡量值的定义在下表分别列出：

容许误差的界定		
小	$EAT = 1$ kip	$ERT = 0.01\%$
中	$EAT = 100$ kip	$ERT = 1\%$
大	$EAT = 1000$ kip	$ERT = 10\%$

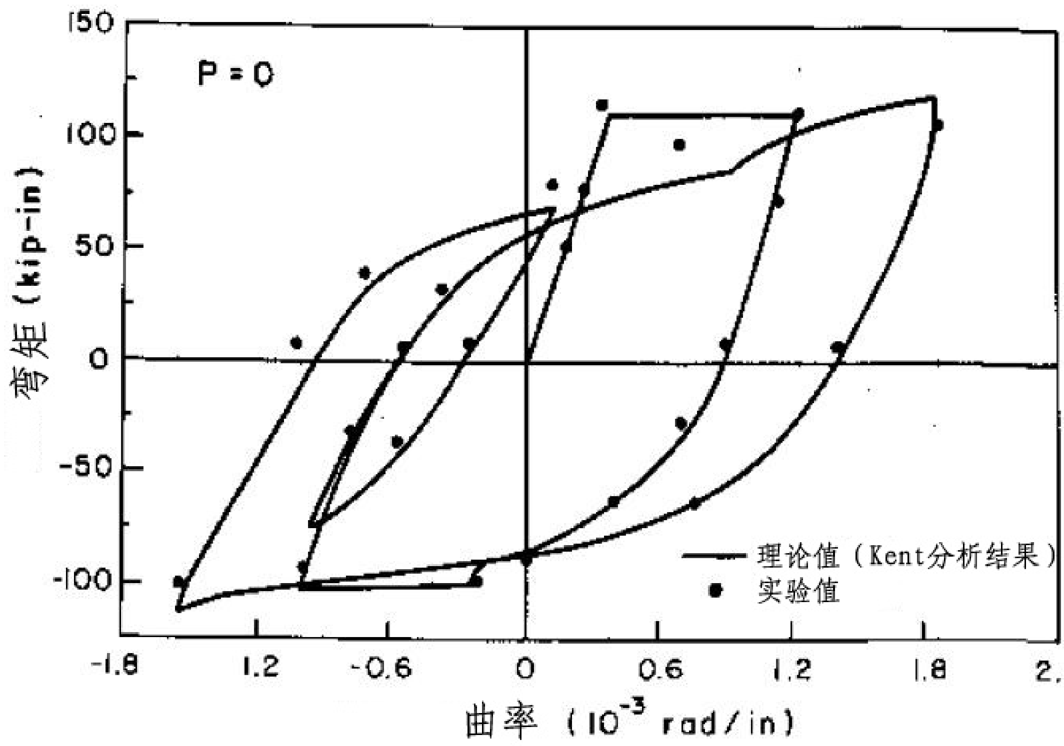


图 5.2 “弯曲-曲率”关系

——来自 Kent 实验和 Kaba-Mahin 分析（1983）

图 5.3 所示的“弯矩-曲率”关系时程曲线是通过 BEAMCOL 软件分析获得的，其结果与图 5.2 中所给出的很吻合。这些结果是通过设定一个小的荷载步长大小和上面定义的 3 套容许误差衡量值获得。当容许误差衡量值为小或中时，结果能够收敛于非常相似的结果；当容许误差衡量值为大时，会导致对截面强度的高估。在并行参数的研究中，当容许误差值相对应为小步长或中步长时（分别对应的在悬臂梁自由端位移增量值为 0.05in. 和 0.5in.），观测到位移增量步长大小对结果精确度的影响不是特别的大。当为大步长时，相应的荷载时程是 4 个荷载步长每半个周期，则为了达到趋同需要施加有一个小的误差。

图 5.4 所示为小容许误差情况下位移步长大小对截面“弯矩-曲率”关系的影响。当荷载步长增大时，每一个荷载步所需单元迭代次数也增加。一种评价算法效率的方法是对一个特定的荷载时程所需的单元迭代总次数。当荷载步长小时，即使每一荷载步达到收敛所需的计算迭代次数只是一两次，相应的单元迭代总次数也会是很大的。既然是这样，则单元迭代总次数与荷载步数成比例。随着

荷载步长的增大，使每一个荷载步收敛所需的迭代次数越来越多。然而这种每一荷载步迭代次数的增加与其相应的荷载步长大小的增加不成比例，因为不是每一荷载步都涉及到明显的非线性行为，而且该算法下应力不平衡呈指数地衰减。因此，迭代的总次数随着荷载步长的增大而减小，这样就能够使分析研究更加经济、高效。遗憾的是，就在大位移增量情况下容许误差衡量值为中或大时而言，这种经济上的获益是以数值求解问题不稳定和在一些步上的欠收敛作为代价的。因此，选择合适的容许误差衡量值和合适的荷载步长大小需要熟练的技巧和丰富的经验、或者是需要一个智能的自动荷载步细分算法。为了能够准确的绘制出一个结构的“荷载-变形”行为关系曲线，我们需要考虑合理的限制荷载步长的大小，以致该问题能够在应用实例中得到更宽松、广泛的应用。

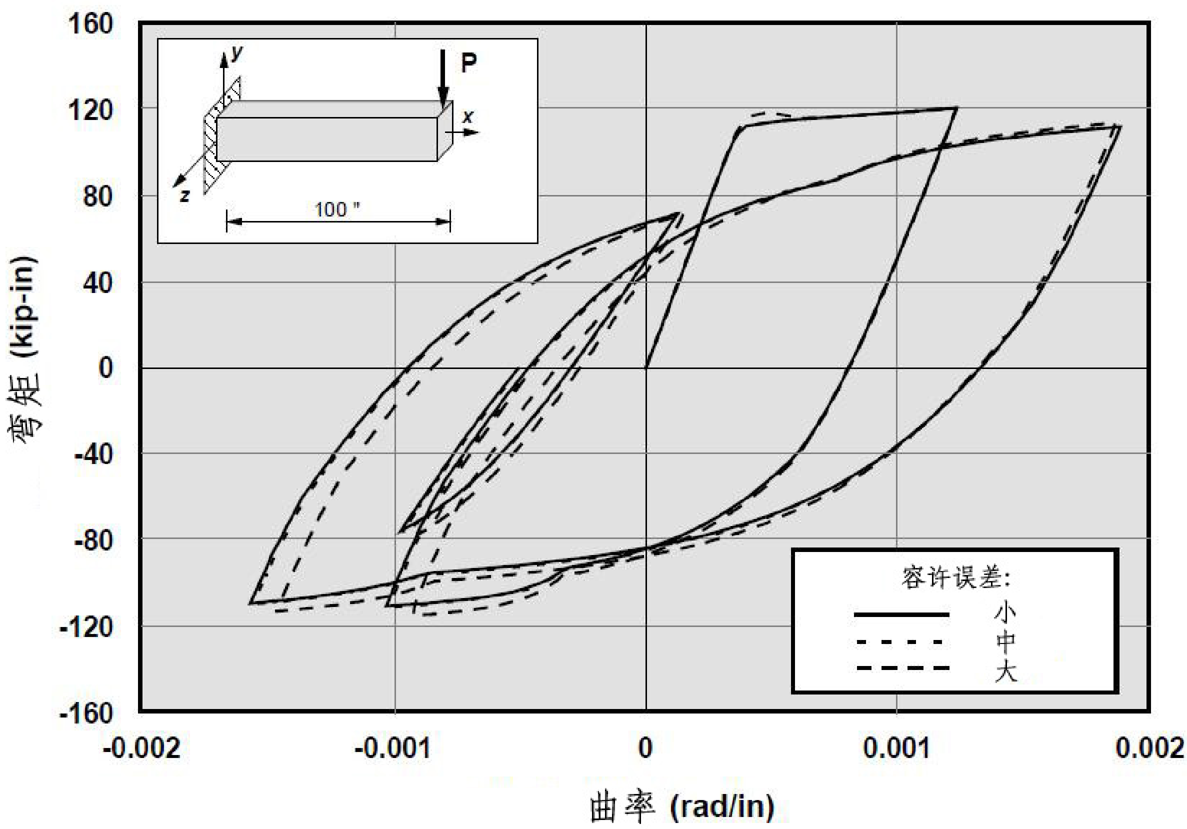


图 5.3 容许误差对内置截面中“弯矩-曲率”关系的影响

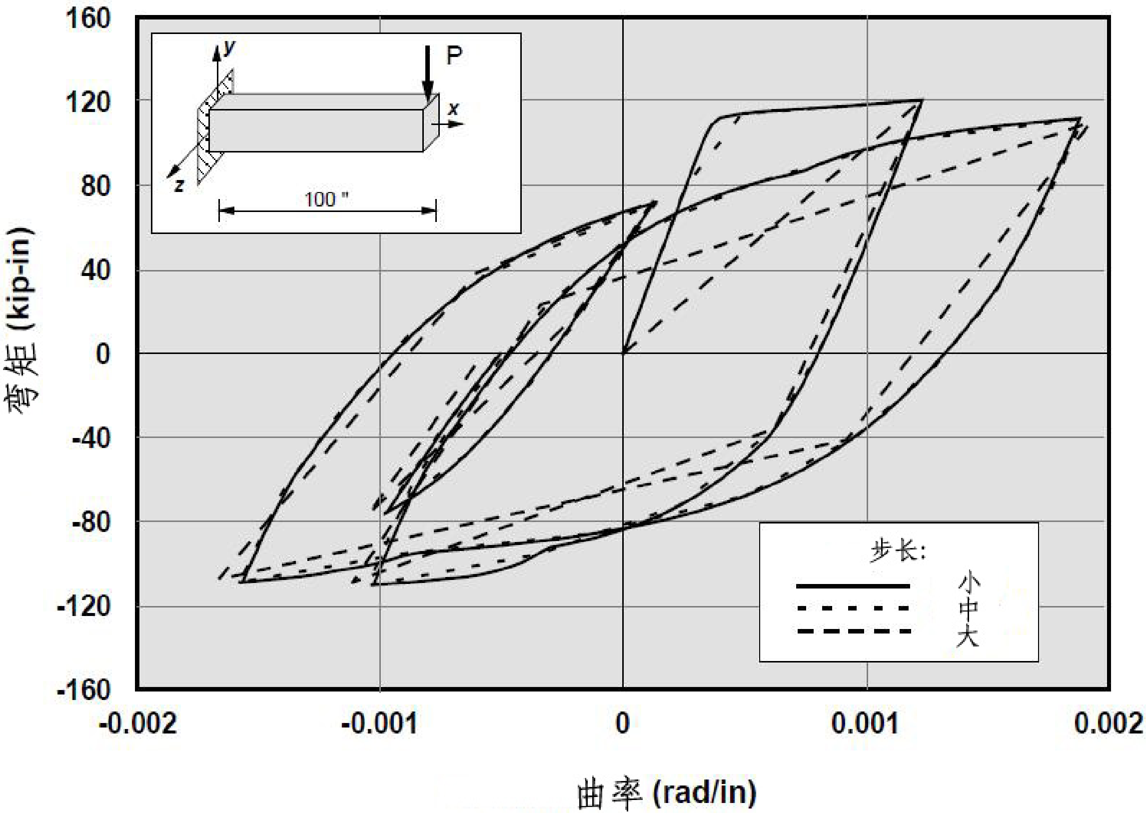


图 5.4 小容许误差情况下荷载步长大小对内置截面中“弯矩-曲率”关系的影响

5.3 单轴受弯悬臂梁

Ma,Bertero 和 Popov 在 1976 年系统地进行了大量的矩形截面和 T 形截面钢筋混凝土梁的试验。在对比实验研究中矩形截面梁记为 R-1，试验样品的模型和横截面的离散化如图 5.5 所示，相关的模型数据列于表格 5.4，表格 5.5 和表格 5.6 分别列出了混凝土和钢筋的模型材料参数，这里采用的材料参数是从现有的混凝土的正方体或圆柱体试块受压实验结果信息中获取。在模拟约束混凝土的性能时这里效仿 Scott 等人在 1982 年所采用的方法。该模型中约束混凝土的约束程度取决于横向钢筋与核心约束混凝土的体积比 ρ_s，即配筋率（当为 R-1 梁时 ρ_s 估计为 0.60%左右）。这里用于对悬臂梁的滞回性能进行研究的模型由两部分构成：用于模拟悬臂自身的 beam-column 单元和一个位移控制分析中在悬臂的自由末端顺着荷载施加方向的很刚的线弹性弹簧。

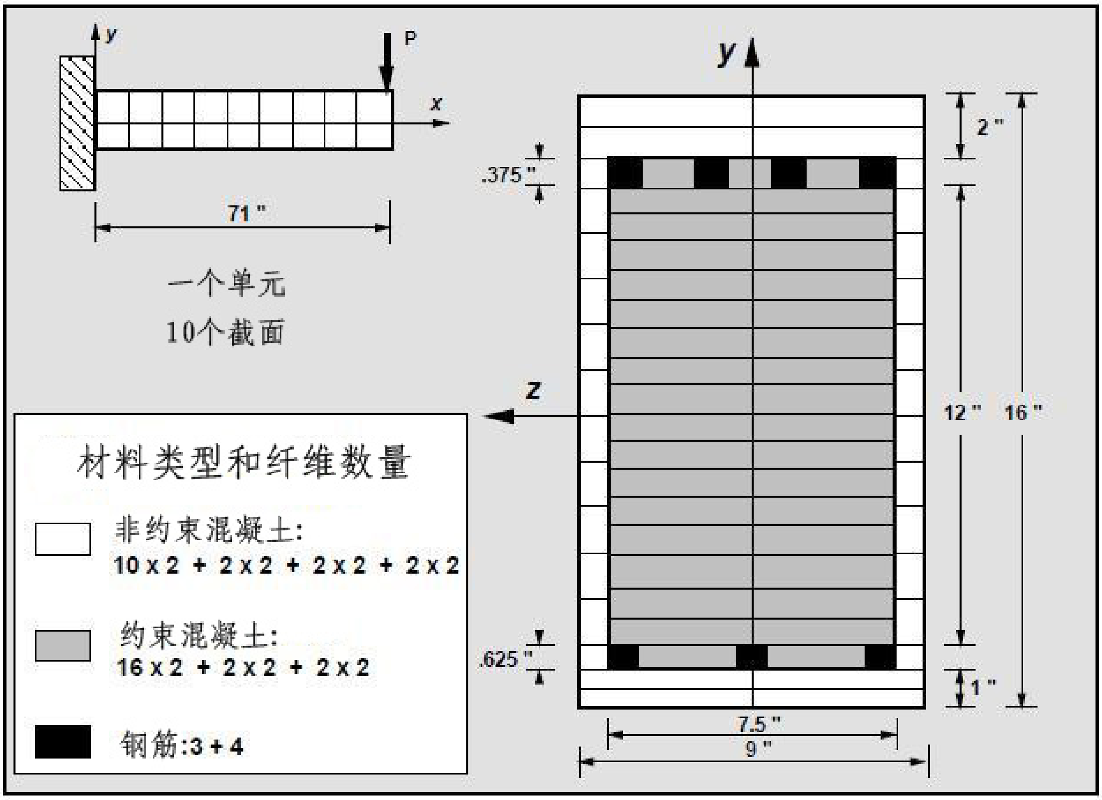


图 5.5 Beam#R-1 的结构离散化

悬臂梁 R-1				
Beam-column 单元的数量：1				
单元长度 ＝71 in.		截面数量 ＝10		
纤维数目				
截面类型	非约束混凝土	约束混凝土	钢筋	总计
I	16×2	20×2	7	79

表 5.4 Beam#R-1 的离散化

混凝土材料特性				
混凝土类型	$E_C\,[\mathrm{ksi}]$	$f_C^{'}\,[\mathrm{ksi}]$	ε_0	ε_u
非约束混凝土(I)	3980	-5.07	-0.00200	-0.003
约束混凝土(I)	3980	-5.43	-0.00214	-0.069

表 5.5 混凝土材料特性

钢筋材料特性			
钢筋类型	$E_S\left[\text{ksi}\right]$	$f_y\left[\text{ksi}\right]$	应变硬化率
钢筋类型 I (I)	29,000	66.5	0.0085

表 5.6 钢筋材料特性

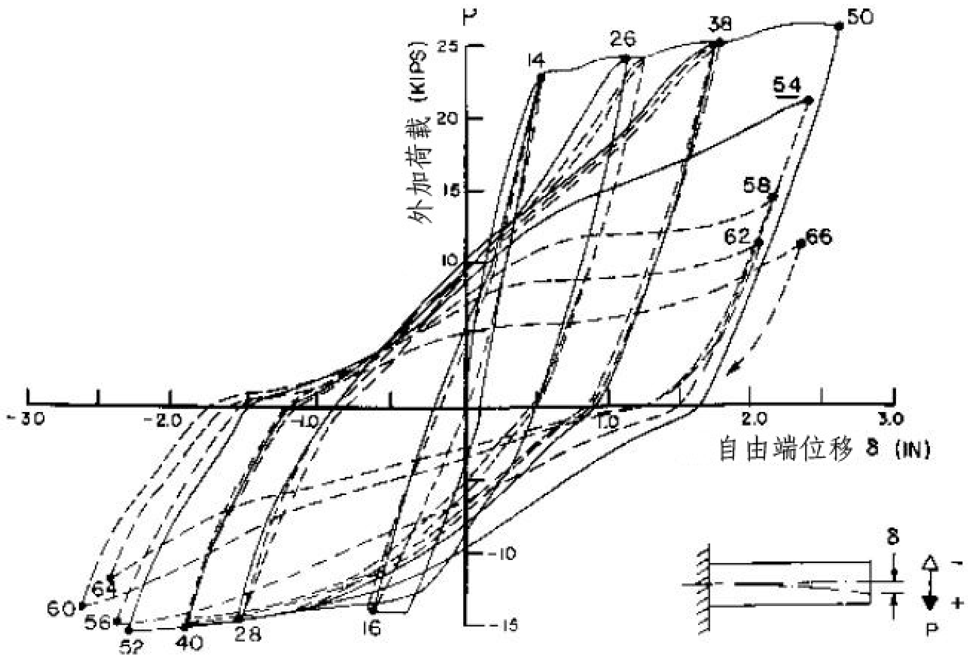


图 5.6 实验 Beam#R-1 自由端荷载-位移关系（MA 等人.1976）

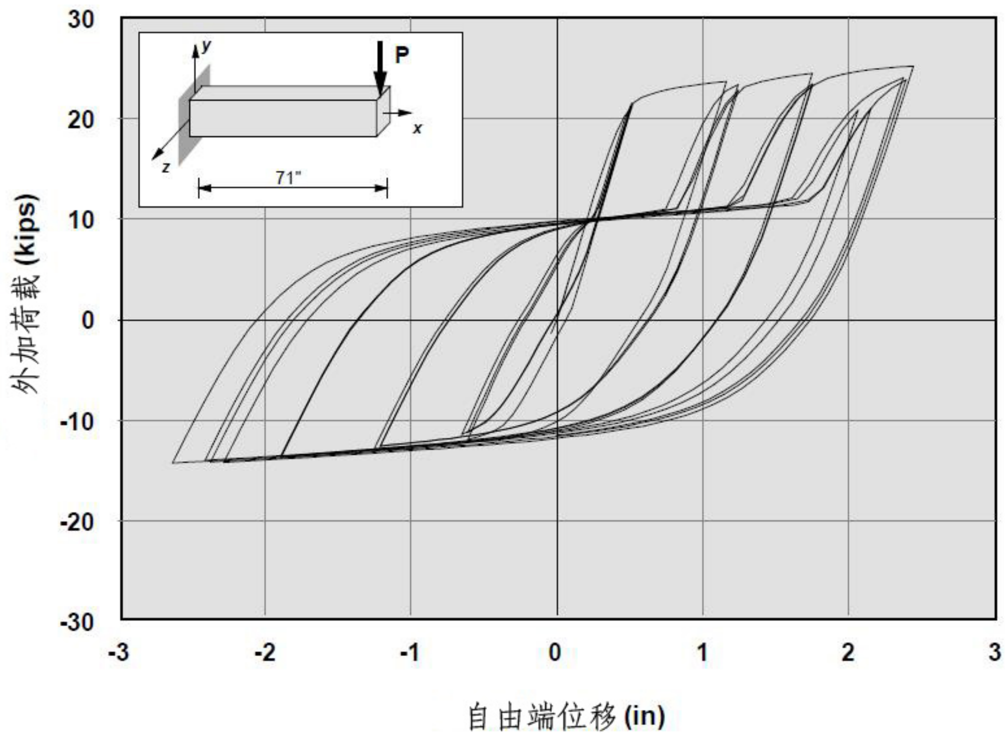


图 5.7 Beam#R-1 荷载-自由端位移关系的分析结果

在实验的数值模拟中，施加在模型上的悬臂自由端处位移是通过在有一个具有很大刚度的线性弹簧时外加一个产生该末端位移的等效应力实现。分析中容许误差衡量值选择 *EAT* = 0.01 kip 和 *ERT*= 1% ,以及按增量为 0.1in.进行施加自由端位移。

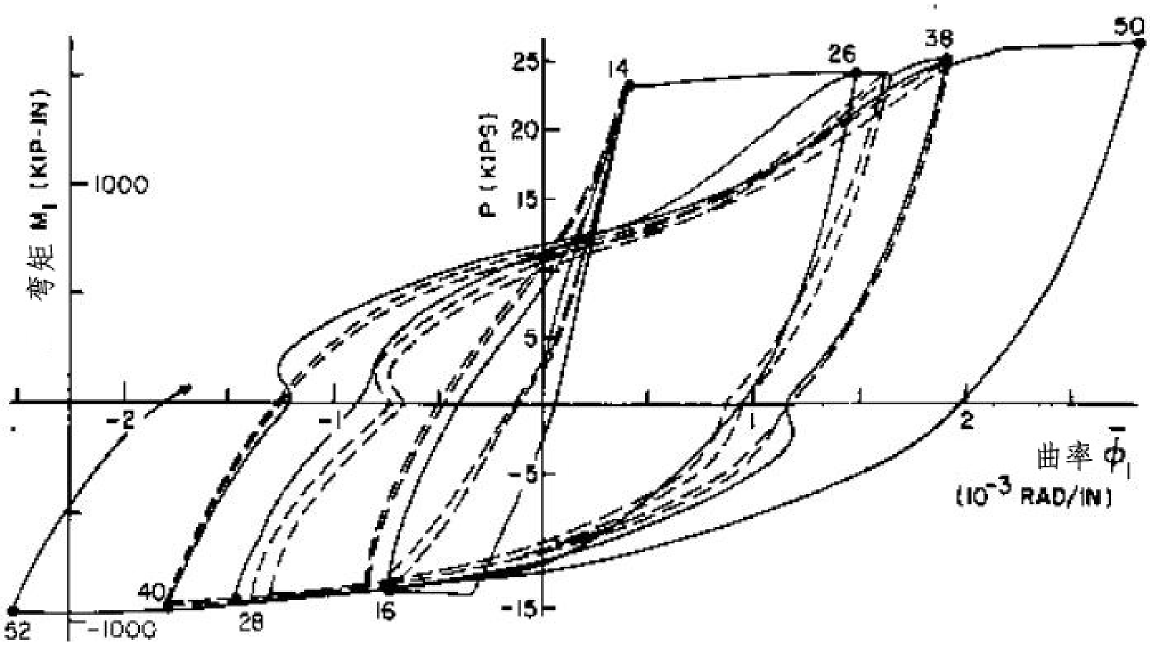


图 5.8 Beam#R-1 在实验中内置截面附近的“弯矩-曲率”关系

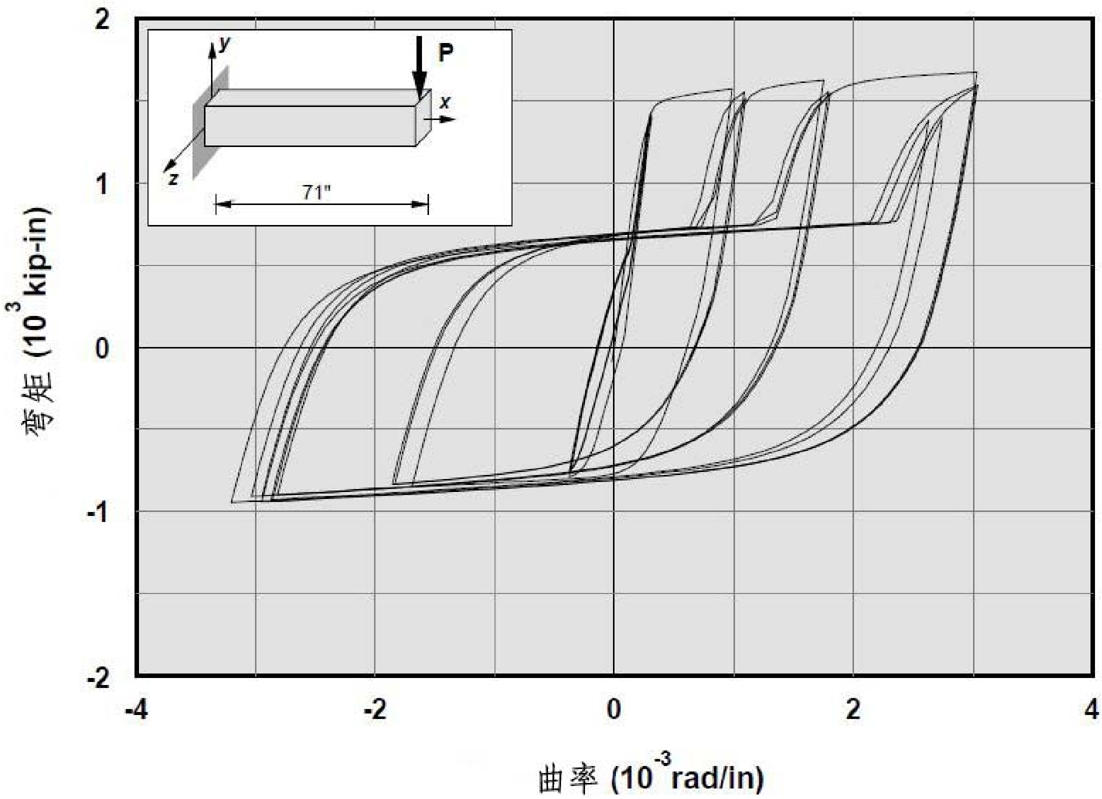


图 5.9　Beam#R-1 在计算分析中内置截面附近的“弯矩-曲率”关系

悬臂的自由末端处的位移是由弯曲变形、剪切变形、混凝土和钢筋之间的粘结滑移，以及由于钢筋从柱头处被拔出而引起的内置截面转动造成的。然而，此处所采用的模型仅适用于弯矩变形；结果表明，图 5.7 中所示分析结果于图 5.6 中的实验结果数据相差很大。在悬臂的内置截面中，此处分析结果和实验结果之间的偏差：当屈服之前是很小的；但是在屈服后的循环周期中，在实验中重新加载时由于剪切和粘结滑移而引起滞回性能的紧束效应（pinching 效应），偏差会特别的显著。在图 5.8 和图 5.9 中，把悬臂的内置截面附近的“弯矩-曲率”关系的计算分析结果和实验结果作了对比。在此例中，因为其他非弹性变形的根源对截面滞回响应不会造成太多的影响，故分析结果和实验结果比较的吻合。

5.4 轴向压力作用下的单轴或两轴受弯柱

Low 和 Moehle 在 1987 年进行了一系列柱的实验，旨在研究不同的荷载时程对在恒定的轴向压力作用下的单轴或两轴受弯柱的影响。如图 5.10 所示，我们选定两根柱试验样品模型来进行相互关系的研究，同样的我们也对模型的横截面进行了上面的分析研究中类似的离散化，相应的模型数据在表 5.7 中列出。

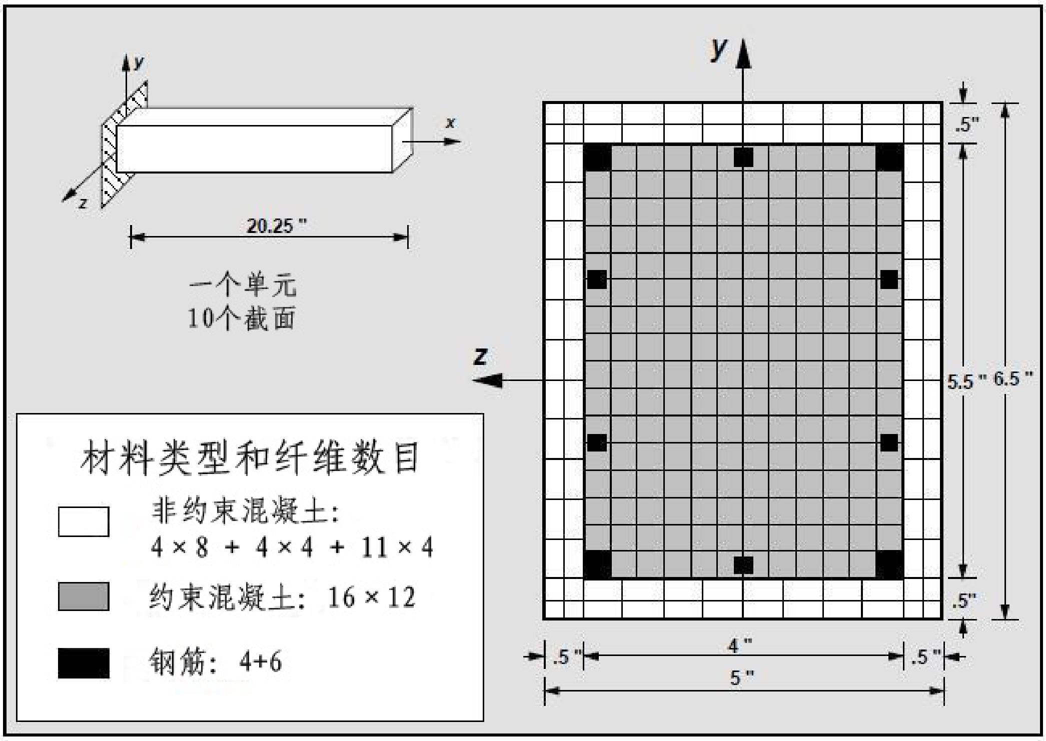


图 5.10 Low-Moehle 试验样品柱#1 和#2 的结构网格划分

这个模型由单一一个 beam-column 单元组成，它包含有根据试验样品的横向钢筋数量的不同划分出的两种不同类型截面。相应的第一种截面是：在柱的下半部分中，横向钢筋与核心约束混凝土的体积比 ρ_s 为 2%；相应的第二种截面是：在柱的上半部分中，横向钢筋与核心约束混凝土的体积比 ρ_s 为 1.3%。相关的混凝土和钢筋的模型材料参数分别列于表格 5.8 和表格 5.9 中，这里采用的材料参数是从现有的混凝土的正方体或圆柱体试块受压实验结果信息中获取。试验中采用 Scott 等人于 1982 年用于模拟约束混凝土行为性能的模型。

<table>
<tr><th colspan="5">Low-Moehle 试验样品柱#1 和#2</th></tr>
<tr><td colspan="5">Beam-column 单元的数量：1</td></tr>
<tr><td colspan="3">单元长度 ＝20.25 in.</td><td colspan="2">截面数量 ＝4</td></tr>
<tr><td colspan="5">纤维数目</td></tr>
<tr><td>截面类型</td><td>非约束混凝土</td><td>约束混凝土</td><td>钢筋</td><td>总计</td></tr>
<tr><td>I 和 II</td><td>4×8+15×4</td><td>16×12</td><td>10</td><td>294</td></tr>
</table>

表 5.7 Low-Moehle 试验样品柱#1 和#2 的离散化

该分析中选取 *EAT* = 0.01 kip 和 *ERT* = 1%作为容许误差衡量值，分析中数值模拟是位移控制下的，并且通过在柱头施加沿 **y** 轴和 **z** 轴的横向位移增量（范围为 0.01~0.04 in）进行的。

①第一个比较研究涉及到 Low 和 Moehle 试验样品柱#1。试验样品中施加的荷载包括有两部分：施加在悬臂自由末端的一个沿弱轴 **z** 的横向周期应力；在实验过程中施加的一个大小为 10 kips 的恒定轴向压力。如图 5.11 是试验样品#1 的分析结果和实验结果的对比，它揭示了试验样品 **z** 方向中横向应力对自由末端位移响应的影响。即使模型相对比试验样品明显的过刚，尤其是对初始阶段的滞回响应，实验结果和分析结果之间都能很好的吻合。两者最初始响应阶段的刚度差异可以认为是由混凝土收缩和温度变化而引起的试验样品的初始开裂的原因。在反向大位移下的滞回性能差异，换句话说，可以认为原因是粘结滑移效应的重要影响和纵向钢筋从支座中拔出。当数值模拟是在位移控制下进行时，这种影响是滞回响应的紧束效应（pinching 效应）和试验样品相对于模型的初始强度损失位移的唯一证据。

混凝土材料特性				
混凝土类型	$E_C\,[\text{ksi}]$	$f_C'\,[\text{ksi}]$	ε_0	ε_u
非约束混凝土(截面 I 和 II)	3700	-5.30	-0.00200	-0.0119
高约束程度混凝土（截面 I）	3700	-6.53	-0.00246	-0.3710
中等约束程度混凝土(截面 II)	3700	-6.11	-0.00231	-0.2330

表 5.8 混凝土材料特性

钢筋材料特性			
钢筋类型	$E_S\,[\text{ksi}]$	$f_y\,[\text{ksi}]$	应变硬化率
钢筋类型 1	29,000	64.9	0.0067
钢筋类型 2	29,000	64.4	0.0038
钢筋类型 3	29,000	73.1	0.0050

表 5.8 钢筋材料特性

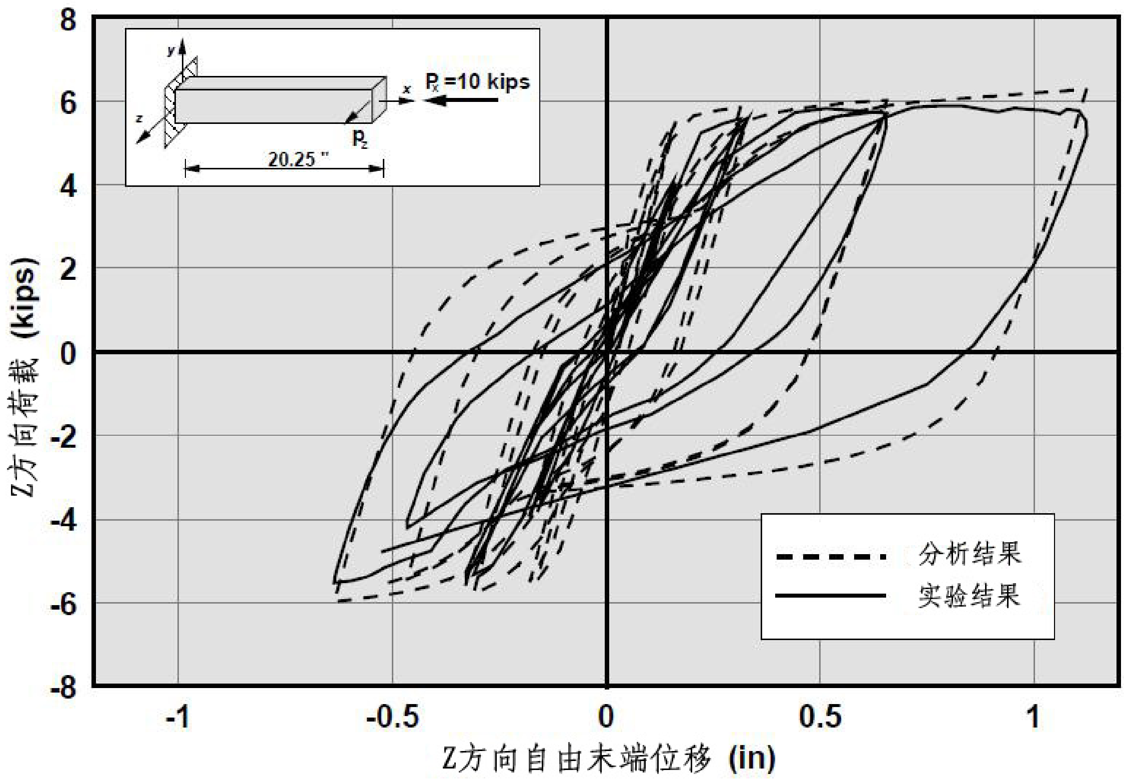


图 5.11　Low-Moehle 试验样品#1：自由末端 Z 方向“荷载-位移”关系的实验结果和分析结果对比

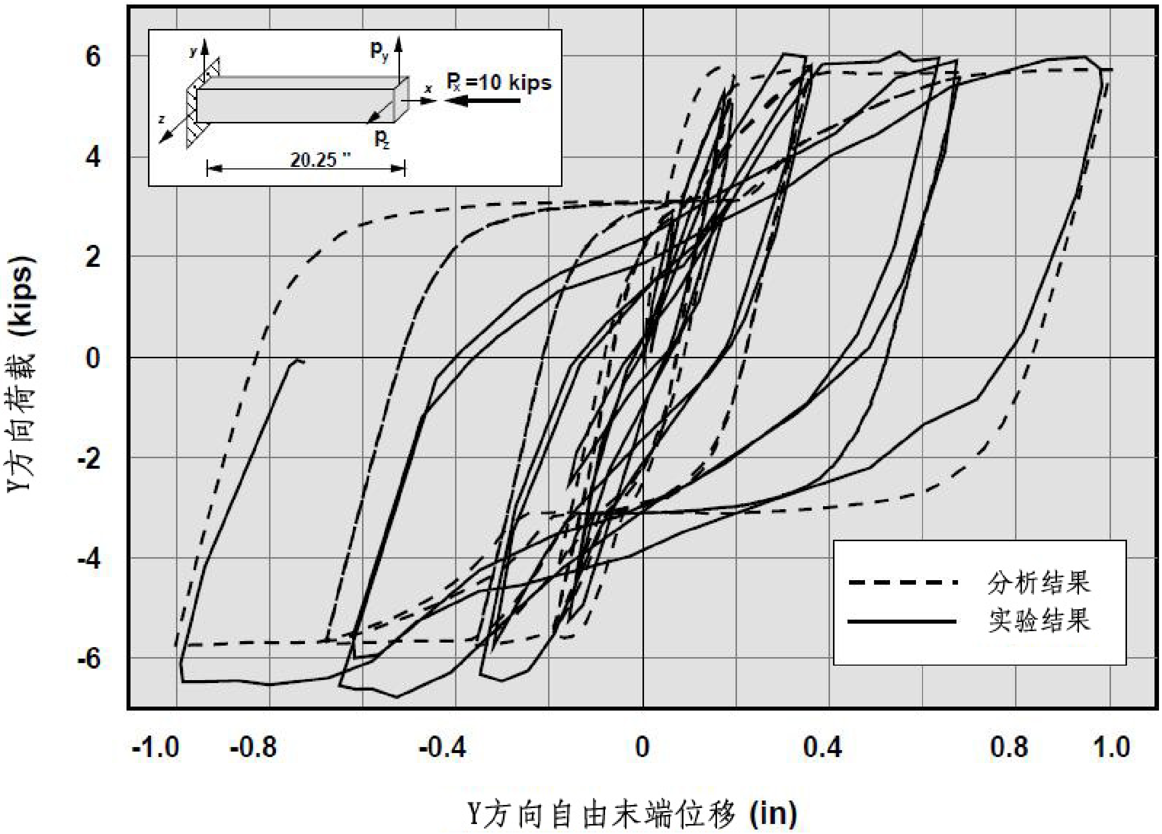


图 5.12　Low-Moehle 试验样品#2：自由末端 Y 方向“荷载-位移”关系的实验结果和分析结果对比

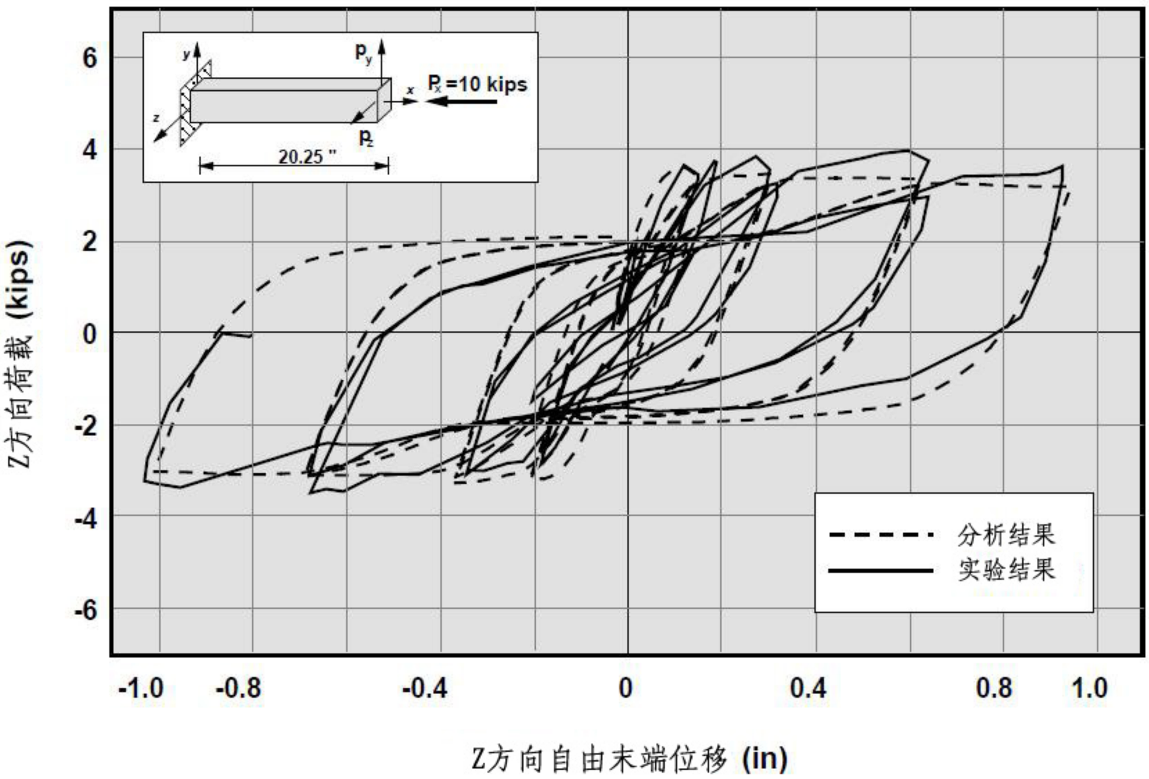


图 5.13 Low-Moehle 试验样品#2：自由末端 Z 方向“荷载-位移”关系的实验结果和分析结果对比

②第二个比较研究涉及到 Low 和 Moehle 试验样品柱#2。试验样品中施加的荷载包括有两部分：一个作用在试验样品悬臂自由末端处且与其主轴 **Z** 和 **Y** 夹角为 45°的横向周期荷载；一个在实验过程中大小恒定为 10 kips 的轴向压力。图 5.12 和图 5.13 分别列出了横向应力对相应的 **Y** 轴方向自由末端位移响应和强轴受弯，以及 **Z** 轴方向自由末端位移响应和弱轴受弯的分析结果和实验结果作对照。这里通过修正计算机分析结果时考虑了试验样品#2 的 P-Δ 效应，用以涵盖横向位移对悬臂底部弯矩的作用影响。在此情况下，柱底部处固定端的旋转是很小的或者只按 4%考虑最大的自由末端位移。即使模型相对比试验样品明显的过刚，尤其是对初始阶段的滞回响应，实验结果和分析结果之间都能很好的吻合。在反向大位移下的滞回性能差异，换句话说，可以认为原因是粘结滑移效应的重要影响和纵向钢筋沿柱高度方向被拔出。当数值模拟是在位移控制下进行时，这种影响是滞回响应的紧束效应（pinching 效应）和试验样品相对于模型的初始强度损失位移的唯一证据。

Low-Moehle 试验样品#2 还被应用于几个参数的研究，这些参数是反映单元中控制截面的数目对分析结果灵敏度。此模型是取决于在应力控制和位移控制下单调荷载情况下强轴的单轴受弯，“荷载-自由末端位移”响应曲线如图 5.14、图 5.15 和图 5.16：

①如图 5.14 所示，为悬臂梁在单调受弯情况下的“荷载-自由末端位移”响应曲线。结果表明，单元弹性随着控制截面数目的减少而增加；并且积分截面的数目越少，截面对单元固定端弹性的贡献就变得越显著。由于在一根悬臂梁的自由末端加载时，固定端截面承受最大的弹性变形，故其自由末端位移随着控制截面数目的减少而增加。8 个截面和 10 个截面的计算结果基本上不能区分出来，这就意味着其收敛于问题的数值分析解；4 个截面和 6 个截面的计算结果与 10 个截面的计算结果获得的响应能够很好的吻合，其相应的最大应力误差分别仅是 5%和 2%.另外，观察发现只有 2 个截面的计算结果的最大应力误差高达 20%.

②如图 5.15 所示，为悬臂梁柱在大小恒为 75 kips 的轴向压力作用且单调受弯下的“荷载-自由末端位移”响应曲线。分析结果是在位移控制下获得的，以此来跟踪研究当非约束混凝土表面有混凝土层裂现象时柱强度的损失。这种柱强度的损失可称为柱的软化，它在单元采用至少 4 个截面时才显现出。当采用 2 个截面时，计算结果表明响应初期会过柔且会低估了屈服强度。

③如图 5.16 所示，为悬臂梁柱在与图 5.15 同样荷载情况但忽虑了箍筋对混凝土的套箍约束作用下的“荷载-自由末端位移”响应曲线。即使在此情况下强

度的丢失是突然的、突变的，但是柱中采用至少 4 个截面时所得的结果与数值分析解非常吻合。当采用 2 个截面时，响应初期会过柔；且当采用 2 个截面和 3 个截面时，峰后响应明显的偏离了其他情况。

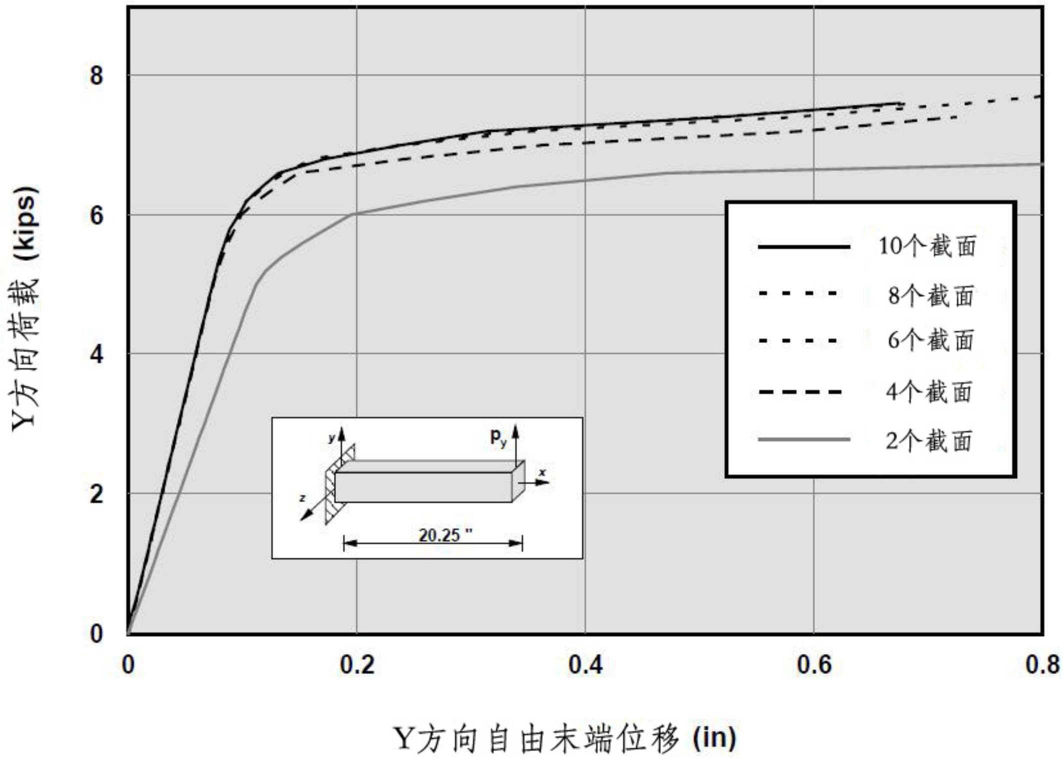


图 5.14 悬臂梁在单调受弯情况下其控制截面的数目对“荷载-自由末端位移”响应的影响灵敏度

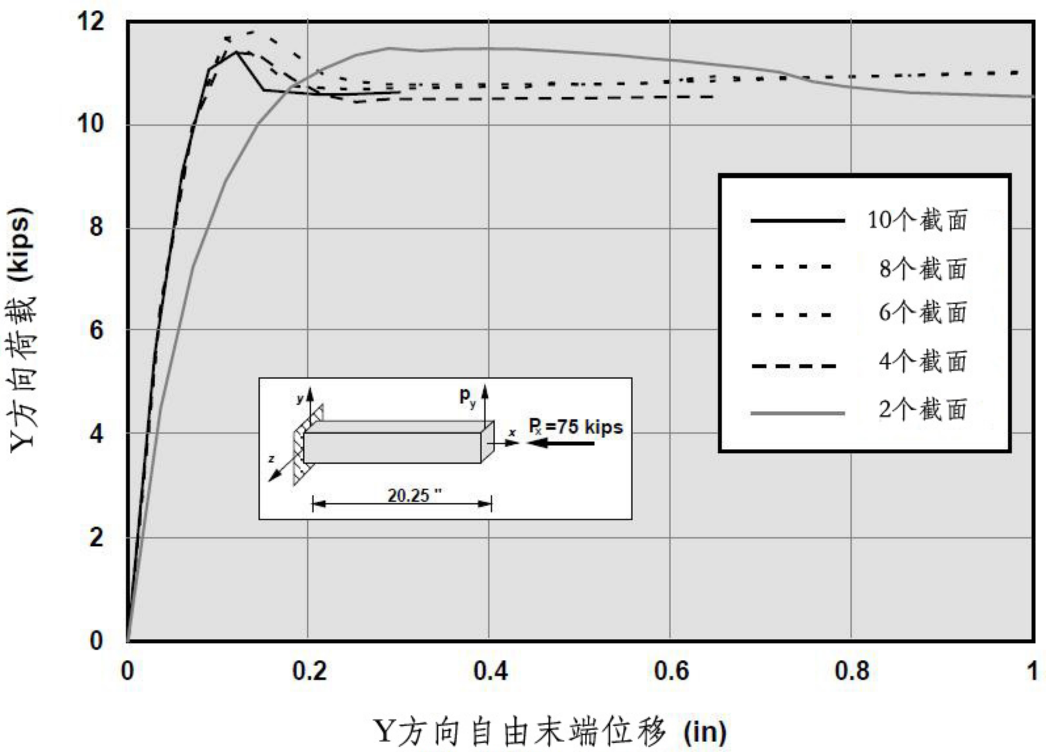


图 5.15 约束混凝土悬臂在单轴受弯和轴向压力同时作用时：分析控制截面的数目对“荷载-自由末端位移”响应的影响灵敏度

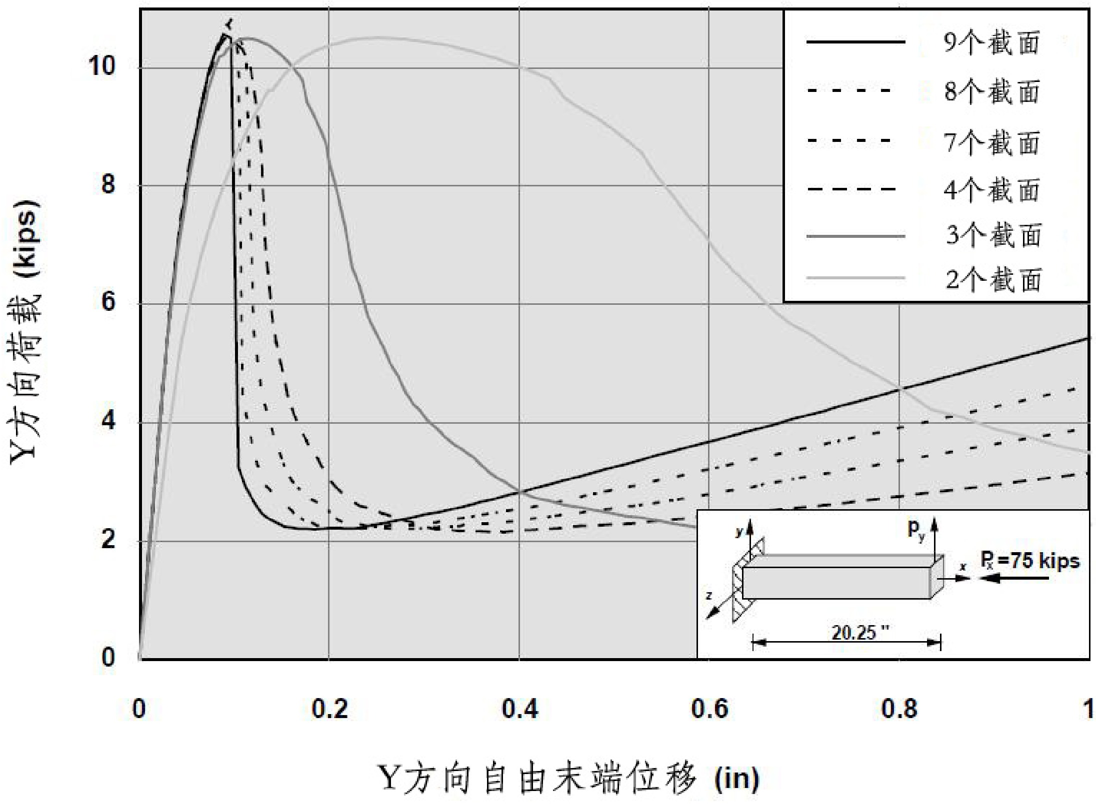


图 5.16 非约束混凝土悬臂在单轴受弯和轴向压力同时作用时：分析控制截面的数目对“荷载-自由末端位移”响应的影响灵敏度

另一个对试验样品#2 的分析是为了研究出一个变化的轴向应力对其滞回性能的影响。遗憾的是，这个分析研究目前为止都没有可用的实验数据。分析中由于悬臂中核心混凝土的约束减弱了，此时有混凝土极限应变ε_u为 0.12。同样的位移时程现在施加在主要的 **y** 和 **z** 方向，从而使悬臂自由末端的位移幅值达到最大：-0.96 in.和 0.96 in. 在 **x** 方向的轴向应力围绕着平均压力大小 75 kips 波动变化，且压力能达到的最大值为 105 kips、最小值为 45 kips. 如此，当构件在 **y** 和 **z** 方向按位移控制条件加载时，则在 **x** 方向是按轴向应力控制的。

施加的荷载和位移变化是成比例的：在 **y** 和 **z** 方向的位移增量为 0.05 in；在 **x** 方向的应力增量为 1.5 kips. 选取作为判断收敛的容许误差值是：绝对误差 *EAT* = 0.1 kips，相对误差 *ERT* = 1%. 分析结果如图 5.17、图 5.18 和图 5.19，它们证明了所建立的模型能够正确描述构件的复杂响应，并且不会存在数值问题，即使是在如周期变化的轴向应力且两轴受弯这样的复杂荷载时程下。

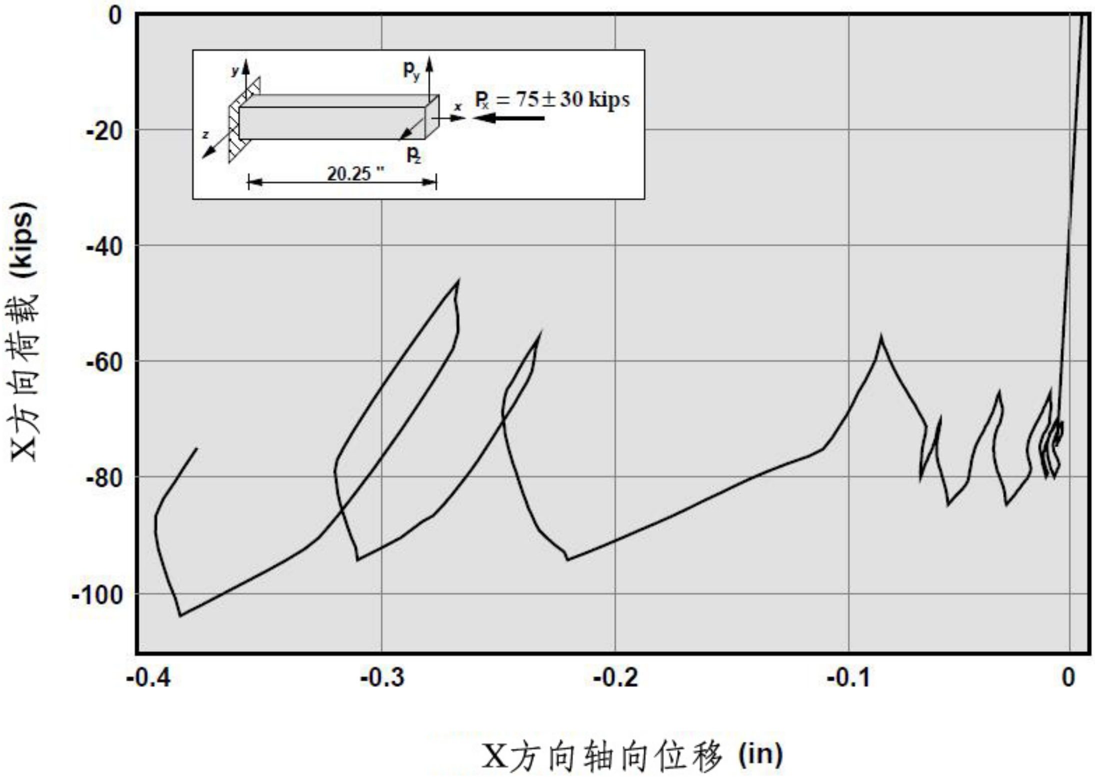


图 5.17 悬臂在轴向周期应力和二轴受弯作用下时
——X 方向的“荷载-轴向位移”关系曲线

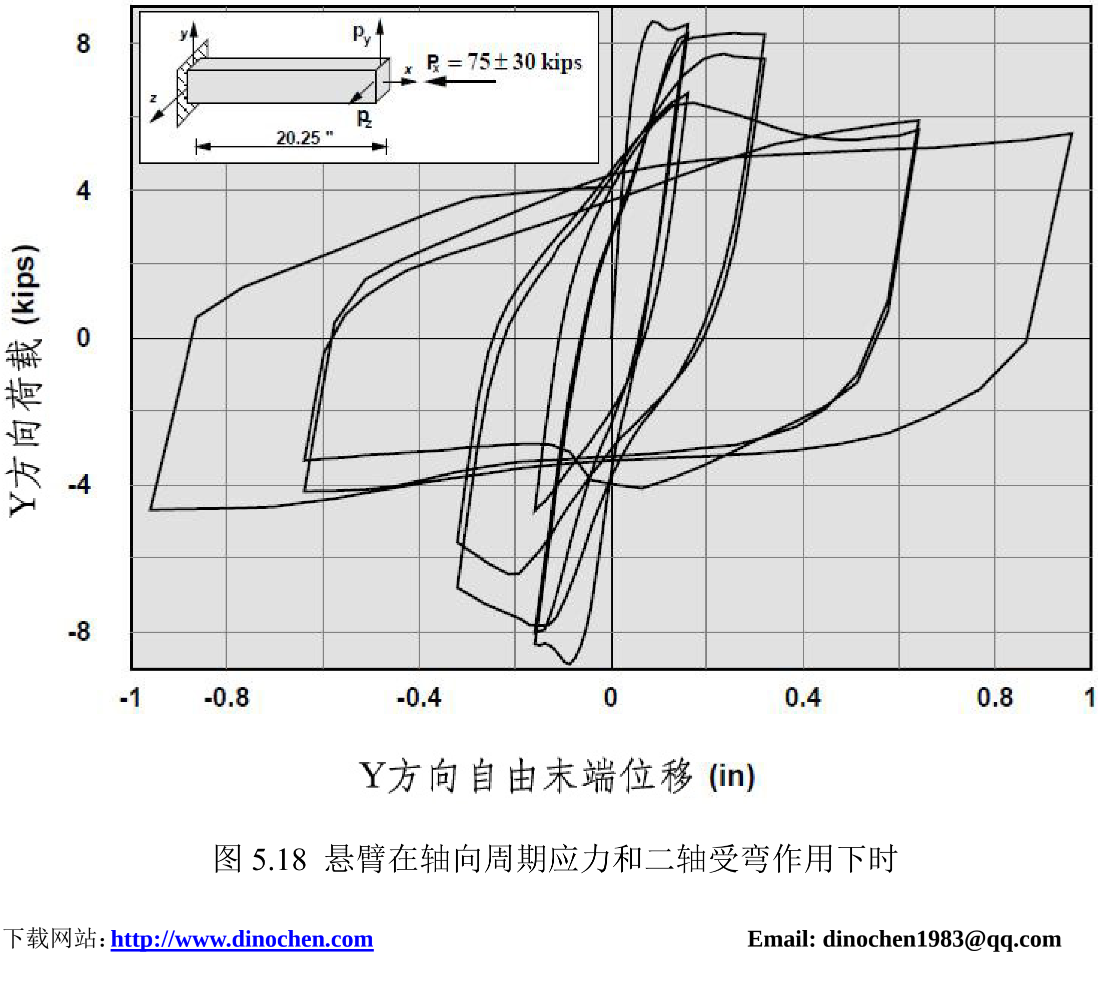


图 5.18 悬臂在轴向周期应力和二轴受弯作用下时

——Y 方向的“荷载-轴向位移”关系曲线

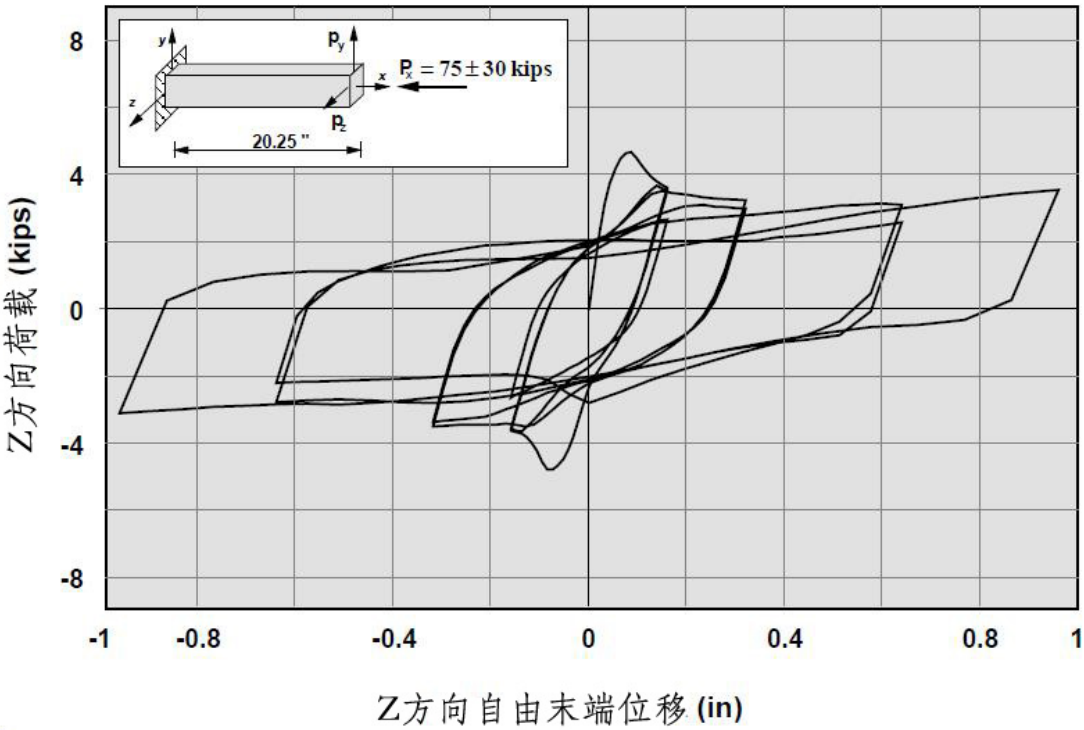


图 5.18 悬臂在轴向周期应力和二轴受弯作用下时

——Z 方向的“荷载-轴向位移”关系曲线

第六章 总结

本研究的目的在于研发一种可靠的、计算高效的“梁-柱”(beam-column)有限单元模型，用于分析由于周期荷载作用引起两轴受弯和轴向应力共同作用时的钢筋混凝土构件响应。单元被离散成纵向钢筋和混凝土纤维，从而截面的“力-形变”关系由纤维的“应力-应变”关系通过整合而得。现在单元的非线性性能完全由钢筋和混凝土的非线性“应力-应变”关系整合导出。单元列式是基于满足沿单元平衡性的弯矩和轴力分布函数，并且而后还需要一种弹性状态下的判定算法，提供给计算机用于计算出单元刚度矩阵和单元阻尼矩阵。这里认为模型中的纤维不会产生相对滑动（即认为完全地粘结），从而平截面假定成立（即截面在构件受力变形后保持不变）。

此处采用的用于单元状态判定的非线性算法是普遍适用的，即能够用于分析研究任何截面的非线性“力-形变”关系。过程中涉及到一个单元的迭代计算方案是否收敛于一种满足材料本构关系且指定容许误差限的状态。在单元迭代计算时，假定的应力和应变插值函数总是能严格意义上满足的单元的平衡性和相容性。达到收敛标准所需的单元迭代计算次数取决于单元刚度和选取的针对该问题的容许误差限。通常来说，要达到非常小的单元容许误差限相应地需要采用很大的单元迭代计算次数。相对而言，为了使结构自由度达到收敛，在单元层面上大的单元容许误差限也要求相应的在结构层面上很大的迭代计算次数。本文采用的方法是数值稳定和功能强大、高效、准确度高，其能够用于描述钢筋混凝土构件复杂的滞回性能，如“应变硬化”、“紧束效应”和在节点和单元周期荷载作用下的“软化效应”。

本报告中还介绍了一种基于弹性有限元梁单元的用于施加单元荷载的新方案。此过程是一种单元状态判定算法的自然延伸，且它是采用了在外加单元荷载作用下精确的内部应力分布。相应的单元末端的固端力在单元状态判定迭代计算过程中确定。在研究重力荷载作用对承受反向侧向荷载结构的影响时，单元荷载的存在的很重要的。

与基于相似刚度的“beam-column”单元相比，这里建议采用的模型提供了3个主要的优点：(a)由于沿着单元采用了精确的应力分布函数，只有少数单元需要进行结构离散化；(b)单元软化能够被处理好而不引起数值困难；(c) 而且通过在给定单元荷载时采用精确的应力分布函数，施加单元荷载是相当简单的。该单元属于弹性单元，但又有区别——普遍和明显的状态判别列式过程依赖于相同的

单元刚度矩阵列式平衡性和相容性条件，但不再凭借特定的逼近法和特殊的求解方案来避免数值困难。与原来的纤维 beam-column 单元是基于时域内“事件-事件”求解方案相比，这里建议的模型更具有普遍适用性，因为它不局限于采用逐步分段线性的“力-形变”关系。它也能够更高效的处理在周期荷载作用下的大型结构分析中可能产生的非常大数目的事件，因为它不再需要关注结构中每一次刚度变化。

通过对照分析，这里建议的模型的分析结果和实验数据能够很好的相关性，特别地，当由于周期荷载作用导致调查研究中构件中产生从少到平均的损伤，它也能如此。由于建议的 beam-column 单元是不考虑剪切变形的，故选取用于测试模型有效性的试验样品要求能够忽略整体响应中剪切变形的贡献影响。在非常大的非弹性变形下，该模型与实验测定中相比具有更高的结构抗力。这是理所当然的，因为该模型不考虑其组素纤维的材料模型中几种重要影响，例如：非约束混凝土和约束混凝土的疲劳损伤的影响、纵向钢筋的受压弯曲和剪切影响，以及构件受损引起的钢筋粘结滑移。此外，该模型不能说明为什么钢筋从试验样品的底部被拔出会引起其固定端的转动。在施加以位移控制条件时，钢筋被拔出对试验样品的承载能力影响甚小，但是它对试验样品的重新加载时的刚度和能量耗散能力有显著的影响。

文中所建议采用的单元现在已做出了清晰的阐述，并且已应用于独立的计算机程序 **BEAMCOL** 中。从而这里提出几点有待研究的问题：

- 更加精密的材料模型用于钢筋、非约束混凝土和约束混凝土的性能模拟后，对钢筋混凝土构件在局部和整体的滞回响应所造成的影响需要进一步的研究。目前这方面的研究仅局限于简单的结构模型，不具备重要特性的代表性，例如：混凝土“应力-应变”关系的疲劳损伤影响、钢筋受压弯曲的影响，等等。

- 需要对参数做出进一步的研究，从而得出构件中控制截面数目（积分点数目）对单元响应影响的灵敏程度。本报告中的研究实例是在位移控制下进行的，研究表明当“荷载-位移响应”能够用 3 个控制截面的模型很好的描绘，此时控制截面数目对截面的“弯矩-曲率响应”是非常灵敏的。这对实际结果是非常重要的，因为局部响应才是决定单元有效与否的关键，就如：最关键截面的钢筋和混凝土应变。既然这样，就需要拟定一套建模的准则用于选择控制截面的数目，以此来预测钢筋混凝土构件的可靠的弯曲和旋转延性、及其塑性铰的长度。

- 应该考虑单元的二阶效应，用于研究由于强烈的地面运动引起的大横向摇摆

下倾覆力矩的重要性，如 P-△效应引起的结构响应。

- 钢筋从基础和梁-柱连接处拔出，从而引起的固定端转动应该包含在模型中，这里是通过修正固端截面性能或者是在梁固端加入特殊的铰单元来实现的。
- 沿单元的钢筋与混凝土间的相对滑移也是很重要的，特别地，如构件的延伸长度不足够、相互搭接处，等等。考虑截面中存在杂质的影响，其本构关系的研究是一项富有挑战性的工作，需要进行进一步的深入研究。
- 建议采用的单元不能够解决由剪切和扭转引起的变形所产生的影响。到目前为止，还不清楚这些影响是否能通过合理的途径引入纤维 beam-column 单元中，因而这个课题值得进一步的研究。
- 建议采用的单元提出了一种高效的引入单元荷载的新方法，这种方法能够很好的适用于预应力混凝土构件的分析。其原理如下，通过建立一系列预应力钢筋束模型与建议的钢筋混凝土 beam-column 单元平行并联，以此达到对单元施加预应力的目的。这样的一种合成单元是当前课题研究的热点。
- 这里采用的非线性求解算法是普遍适用的。问题在于，通过对单元中不同截面施加不同的非线性“力-形变关系”的这种实施方案有待进一步的探究；同样地，如当系统中含有数个串联或并联的弹簧（包括串联和并联都有），该算法的应用推广需要进一步的深入研究。
- 建议的 beam-column 单元如何在通用的有限元计算机程序中实施，从而应用于大型结构的非线性静力和动力分析中，是一项非常重要的工作。目前，该单元在有限元程序 **FEAP** 中取得了完美的应用。本研究中只进行了一些简单的讨论，权且可作为一份对未来研究课题的报告。这些未来研究的课题包括：若干参数的研究，用于探究在地震激励下的钢筋混凝土和预应力混凝土结构的非线性分析中的建模准则；以及对程序 **FEAP** 结构中采用不同的非线性求解方案的探究。
- 从一开始已有的有限元程序 **FEAP** 功能，到遵循的非线性求解方案，再到前处理和后处理程序，需要开发一个完整的计算机工作界面和程序来用于钢筋混凝土和预应力混凝土结构的非线性静力和动力分析。这样的一整套分析程序包应该包括不同复杂程度水平的单元（从简单的线弹性单元到非常精密的非线性 3-D 有限单元），并且应用它对同样的非线性结构模型进行分析应该产生出无间隙的有限元模型。

参考文献

Anagnostopoulos, S. (1981). "Inelastic Beams for Seismic Analysis of Structures." Journal of Structural Engineering, ASCE, 107(ST7), pp. 1297-1311.

Banon, H., Biggs, J. and Irvine, M. (1981). "Seismic Damage in Reinforced Concrete Frames." Journal of Structural Engineering, ASCE, 107(ST9), pp. 1713-1729.

Bazant, S. and Bhat, P. (1977). "Prediction of Hysteresis in Reinforced Concrete Members." Journal ofStructural Engineering, ASCE, 103(ST1), pp. 151-167.

Bertero, V.V., Aktan, A., Charney, F. and Sause, R. (1984). "Earthquake Simulator Tests and Associated Experimental, Analytical and Correlation Studies of One-Fifth Scale Model." in, Earthquake Effects on Reinforced Concrete Structures, American Concrete Institute, SP-84-13, Detroit, pp. 375-424.

Brancaleoni, F., Ciampi, V. and Di Antonio, R. (1983). "Rate-Type Models for Non Linear Hysteretic Structural Behavior." EUROMECH Colloquium, Palermo, Italy.

Charney, F. and Bertero, V.V. (1982). "An Evaluation of the Design and Analytical Seismic Response of a Seven Story Reinforced Concrete Frame-Wall Structure." Report EERC 82-08, Earthquake Engineering. Research Center, Berkeley.

Chen, W. and Atsuta, T. (1977). Theory of Beam-Columns. McGraw Hill, New York.

Ciampi, V. and Carlesimo, L. (1986). "A Nonlinear Beam element for Seismic Analysis of Structures." 8th European Conference on Earthquake Engineering, Lisbon.

Ciampi, V. and Nicoletti, M. (1986). "Parameter Identification for Cyclic Constitutive Models with Stiffness and Strength Degradation." 8th European Conference on Earthquake Engineering, Lisbon.

Clough, R. and Benuska, L. (1967). "Nonlinear Earthquake Behavior of Tall Buildings." Journal of Mechanical Engineering, ASCE, 93(EM 3), pp. 129-146.

Clough, R. and Johnston, S. (1966). "Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements." Transactions of Japan Earthquake Engineering Symposium, Tokyo, pp. 195-198.

Darvall, L.P. and Mendis, P. (1985). "Elastic-Plastic-Softening Analysis of Plane Frames." Journal of Structural Engineering, ASCE, 11(ST4), pp. 871-888.

Filippou, F.C., Popov, E.P. and Bertero, V.V. (1983). "Effects of Bond Deterioration on Hysteretic Behavior of Reinforced Concrete Joints." EERC Report 83-19, Earthquake Engineering. Research Center, Berkeley.

Filippou, F.C., and Issa, A. (1988). "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Frames under Cyclic Load Reversals." EERC Report 88-12, Earthquake Engineering. Research Center, Berkeley.

Giberson, M. (1967). "The Response of Nonlinear Multi-Story Structures Subjected to Earthquake Excitations." Earthquake Engineering Research Laboratory, Pasadena.

Helleslan d, J. and Scordelis, A. (1981). "Analysis of RC Bridge Columns Under Imposed Deformations." IABSE Colloquium, Delft, Netherlands, pp. 545-559.

Iwan, W. (1978). "Application of Nonlinear Analysis Techniques." in, Iwan W. ed., Applied Mechanics in Earthquake Engineering, ASME, AMD, 8, New York, pp. 135-161.

Kaba, S. and Mahin, S.A. (1984). "Refined Modeling of Reinforced Concrete Columns for Seismic Analysis." EERC Report 84-03, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Karsan, I.D., and Jirsa, J.O. (1969). "Behavior of Concrete under Compressive Loadings", Journal of the Structural Division, ASCE, 95(ST12).

Kent, D.C. (1969). "Inelastic Behavior of Reinforced Concrete Members with Cyclic Loading.". Ph.D. Thesis, University of Canterbury, Christchurch, New Zealand.

Kent, D.C., and Park, R. (1971). "Flexural Members with Confined Concrete", Journal of the Structural Division, ASCE, 97(ST7).

Keshavarzian, M. and Schnobrich, W. (1985). "Inelastic Analysis of RC Coupled Shear Walls." Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 13, pp. 427-448.

Lai, S., Will, G. and Otani, S. (1984). "Model for Inelastic Biaxial Bending of Concrete Members." Journal of Structural Engineering, ASCE, 110(ST11), pp. 2563-2584.

Low, S.S. and Moehle J.P. (1987). "Experimental Study of Reinforced Concrete Columns Subjected to Multi-Axial Cyclic Loading." EERC Report 87-14, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Ma, S.Y., Bertero, V.V. and Popov, E.P. (1976). "Experimental and Analytical Studies on the Hysteretic Behavior of Reinforced Concrete Rectangular and T-Beams", EERC Report 76-2, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Mahasuverachai, M. (1982). "Inelastic Analysis of Piping and Tubular Structures." EERC Report 82-27, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Mander, J.B., Priestley, M.J.N. and Park, R. (1988). "Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete." Journal of Structural Engineering, ASCE, 114(ST8), pp. 1804-1826.

Mari, A. and Scordelis, A. (1984). "Nonlinear Geometric Material and Time Dependent Analysis of Three Dimensional Reinforced and Prestressed Concrete Frames." SESM Report 82-12, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.

Menegotto M., and Pinto, P.E. (1973). "Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-Elastic Behavior of Elements under Combined Normal Force and Bending", Proceedings, IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well Defined Repeated Loads", Lisbon, pp. 15-22.

Menegotto, M. and Pinto, P.E. (1977). "Slender RC Compressed Members in Biaxial Bending." Journal of Structural Engineering, ASCE, 103(ST3), pp. 587-605.

Meyer, C., Roufaiel, M.S. and Arzoumanidis, S.G. (1983). "Analysis of Damaged Concrete Frames for Cyclic Loads." Earthquake Engineering and Structural

Dynamics, Vol. 11, pp. 207-228.

Okada, T., Seki, M. and Asai, S. (1976). "Response of Reinforced Concrete Columns to Bi-directional Horizontal Forces and Constant Axial Force." Bulletin of ERS, 10, Tokyo, pp. 30-36.

Otani, S. (1974). "Inelastic Analysis of R/C Frame Structures." Journal of the Structural Division, ASCE, 100(ST7).

Ozdemir, H., (1981). "Nonlinear Transient Dynamic Analysis of Yielding Structures." Ph. D. Thesis, Department of Civil Engineering, University of California, Berkeley.

Prager, W. and Hodge, P. (1951). Theory of Perfectly Plastic Solids, John Wiley and Sons, New York.

Roufaiel, M.S.L. and Meyer, C. (1987). "Analytical Modeling of Hysteretic Behavior of R/C Frames." Journal of Structural Engineering, ASCE, 113 (ST3), pp. 429-444.

Scott, B.D., Park, R. and Priestley, M.J.N. (1982). "Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates", ACI Journal, Vol. 79, No. 1, pp. 13-27.

Sheikh, S. and Yeh, C.C. (1990). "Tied Concrete Columns Under Axial Load and Flexure." Journal of Structural Engineering, ASCE, 116 (ST10), pp. 2780-2800.

Soleimani, D., Popov, E.P. and Bertero, V.V. (1979). "Nonlinear Beam Model for R/C Frame Analysis." 7th ASCE Conference on Electronic Computation, St. Louis.

Spacone, E., Ciampi, V. and Filippou, F.C. (1992). "A Beam Element for Seismic Damage Analysis." EERC Report, to be published, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley.

Takayanagi, T. and Schnobrich, W. (1979). "Non Linear Analysis of Coupled Wall Systems." Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 7, pp. 1-22

Takeda, T., Sozen, M.A. and Nielsen, N. (1970). "Reinforced Concrete Response to Simulated Earthquakes." Journal of Structural Engineering, ASCE, 96(ST12), pp. 2557-2573.

Takizawa, H. (1976). "Notes on Some Basic Problems in Inelastic Analysis of Planar RC Structures." , Trans. Of Arch. Inst. of Japan, 240, Part I in Feb. 1976, pp. 51-62, Part II in March 1976, pp. 65-77.

Takizawa, H. and Aoyama, H. (1976). "Biaxial Effects in Modeling Earthquake Response of RC Structures." Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 4, pp. 523-552.

Zeris, C.A. (1986). "Three Dimensional Nonlinear Response of Reinforced Concrete Buildings." Ph. D. Thesis, University of California, Department of Civil Engineering, Berkeley.

Zeris, C.A. and Mahin, S.A. (1988). "Analysis of Reinforced Concrete Beam-Columns under Uniaxial Excitation." Journal of Structural Engineering, ASCE, 114(ST4), pp. 804-820.

Zeris, C.A. and Mahin, S.A. (1991). "Behavior of Reinforced Concrete Structures Subjected to Biaxial Excitation." Journal of Structural Engineering, ASCE, 117(ST9), pp. 2657-2673.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1989). The Finite Element Method. Volume 1. Basic Formulation and Linear Problems. Fourth Edition. McGraw Hill, London.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (1991). The Finite Element Method. Volume 2. Solid and Fluid Mechanics, Dynamics and Non-Linearity. Fourth Edition. McGraw Hill, London.

附录 A 求解算法总结

这里用一系列和第 2、3 章末相应的步骤总结了杰出电脑程序的计算方案。虽然第 2、3 章末尾的总结为了清晰，只局限于步骤顺序的基本描述,但本附录中包含程序里详细的数值计算，根据 4.2 节介绍的符号，这个程序包含由上标表示的一组复杂迭代过程中的每一个变量状态。这个算法由图 A.1~A.4 说明。

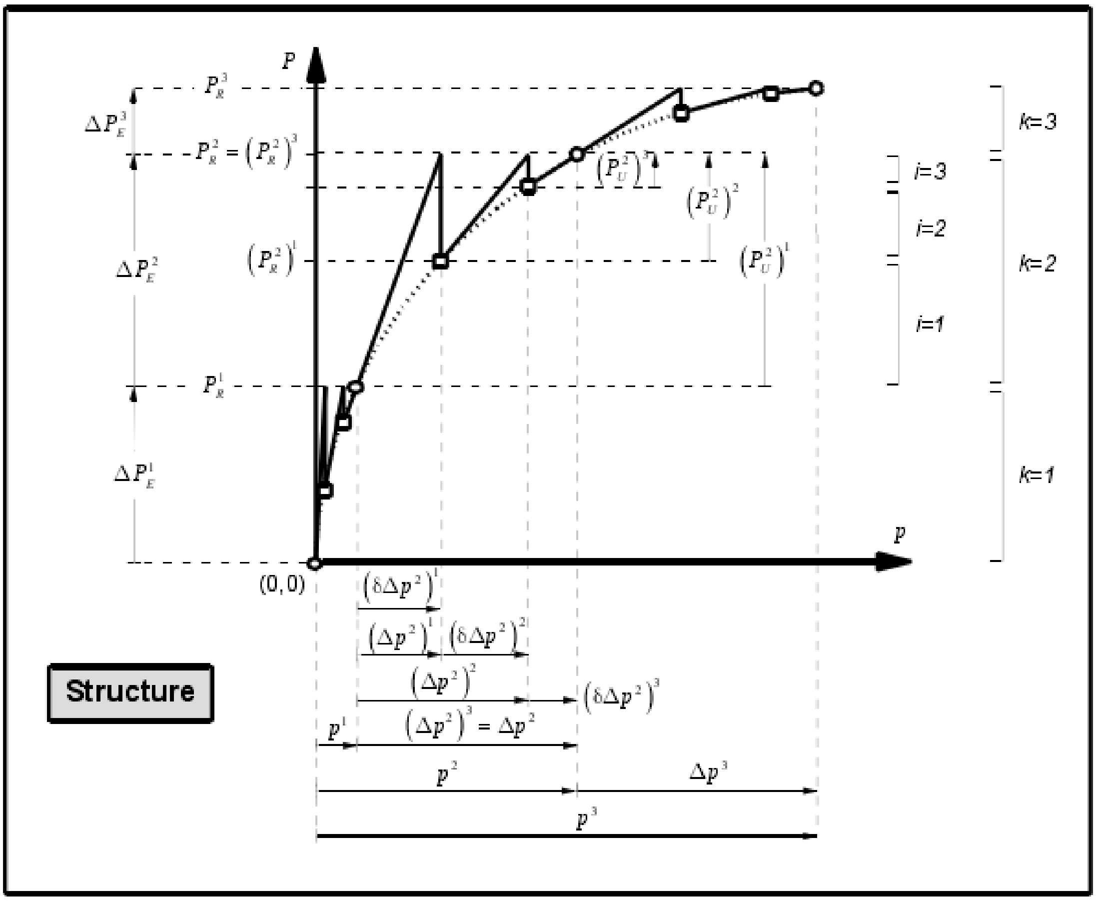


FIGURE A.1 EXAMPLE OF FORCE-DISPLACEMENT HISTORY AT THE STRUCTURE LEVEL

（1）开始分析

设 k=1。

（2）开始 Newton-Raphson 迭代

设 i=1。

（3）解决全局等式和修改结构的位移增量

利用 i-1 步 Newton-Raphson 迭代的非平衡力向量 $\boxed{\left(\mathbf{P}_U^k\right)^{i-1}}$ 和结构的切线刚度矩阵 $\boxed{\left(\mathbf{K}_s^k\right)^{i-1}}$ ，可以从等式的线性方程组中计算出结构位移增量的改变量 $\boxed{\left(\delta\Delta\mathbf{p}^k\right)^{i}}$。

$$\boxed{\left(\mathbf{P}_U^k\right)^{i-1}=\left(\mathbf{K}_s^k\right)^{i-1}\cdot\left(\delta\Delta\mathbf{p}^k\right)^{i}}$$

在（19）中，非平衡力向量 $\left(\boldsymbol{P}_U^k\right)^{i-1}$ 是 i-1 步 Newton-Raphson 迭代中总作用荷载与总抵抗力之相减之差。当 k=1 且 i=1 时，$\left(\mathbf{P}_U^1\right)^0=\Delta\mathbf{P}_E^1$。切线刚度矩阵 $\left(\mathbf{K}_s^k\right)^{i-1}$ 基于前一个 Newton-Raphson 迭代末尾的结构状态且在（18）中确定。当 i=1 时，存在两种可能：

k=1：初始刚度 $\mathbf{K}_s^0$ 通过在所有单元的截面处施加一个非常小的变形来确定。纤维材料模量通过截面、单元及结构刚度的组集产生初始切线弹性模量 E_{tan}。报告中的混凝土单元，在拉力作用下没有刚度；但在压力作用下，初始切线模量总是对应初始切线刚度。

K>1：结构刚度和 k-1 步荷载步最后的切线刚度一样，即 $\left(\mathbf{K}_s^k\right)^0=\mathbf{K}_s^{k-1}$。

结构位移增量 $\left(\delta\Delta\mathbf{p}^k\right)^i$ 加上在 i-1 步 Newton-Raphson 迭代末尾的位移增量 $\left(\Delta\mathbf{p}^k\right)^{i-1}$ 得到第 i 步迭代的位移增量。

$$\left(\Delta\mathbf{p}^k\right)^i=\left(\Delta\mathbf{p}^k\right)^{i-1}+\left(\delta\Delta\mathbf{p}^k\right)^i$$

当 i=1 时，$\left(\Delta\mathbf{p}^k\right)^0$=0。

（4）计算单元的变形增量

利用兼容矩阵 $\mathbf{L}_{ele}$，单元变形增量的改变量 $\left(\delta\Delta\mathbf{q}^k\right)^i$ 可以从结构位移增量 $\left(\delta\Delta\mathbf{p}^k\right)^i$ 中计算得到：

$$\left(\delta\Delta\mathbf{q}^k\right)^i=\mathbf{L}_{ele}\cdot\left(\delta\Delta\mathbf{p}^k\right)^i$$

单元变形增量在第 i 步迭代中变为：

$$\left(\Delta\mathbf{q}^k\right)^i=\left(\Delta\mathbf{q}^k\right)^{i-1}+\left(\delta\Delta\mathbf{q}^k\right)^i$$

当 i=1 时，$\left(\Delta\mathbf{q}^k\right)^0$=0。注意，在单元的第 j 次迭代循环中，单元位移增量不会改变。

（5）开始确定单元状态

设 j=1。

（6）计算单元作用里增量的改变量

由两种可能：

当 j=1 时，利用 i-1 步 Newton-Raphson 迭代末尾的单元切线刚度矩阵 $\boxed{\left(\mathbf{K}^{k}\right)^{i-1}}$，$\boxed{\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{1}}$可以从 i 步 Newton-Raphson 迭代中单元位移增量的改变量 $\boxed{\left(\delta\Delta\mathbf{q}^{k}\right)^{i}}$ 计算得到。

$$\boxed{\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{1}=\left(\mathbf{K}^{k}\right)^{i-1}\cdot\left(\delta\Delta\mathbf{q}^{k}\right)^{i}}$$

当 j>1 时，$\boxed{\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{1}}$ 可以从 j-1 步末尾的单元残余变形 $\boxed{\left(\left(\mathbf{s}^{k}\right)^{i}\right)^{j-1}}$ 和相应的单元刚度矩阵计算得到。

$$\boxed{\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j}=-\left(\left(\mathbf{K}^{k}\right)^{i}\right)^{j-1}\cdot\left(\left(\mathbf{s}^{k}\right)^{i}\right)^{j-1}}$$

（7）修改单元作用力增量和单元抵抗力

根据单元作用力增量的改变量 $\boxed{\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j}}$，单元作用力增量 $\boxed{\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j-1}}$ 在第 j 次迭代中变为：

$$\boxed{\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j}=\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j-1}+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j}}$$

当 i=1 且 j=1 时，$\boxed{\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{1}\right)^{0}}$=0。

单元作用力增量加上 k-1 步收敛的荷载步末尾的抵抗力向量 $\boxed{\mathbf{Q}^{k-1}}$ 等于单元当前的抵抗力：

$$\boxed{\left(\left(\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j}=\mathbf{Q}^{k-1}+\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j}}$$

（8）计算截面的作用力增量

用插值函数 $\boxed{\boldsymbol{b}(x)}$ 计算截面作用力增量的改变量，相应的作用力增量变为：

$$\boxed{\begin{gathered}\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}=\mathbf{b}(x)\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^{k}\right)^{i}\right)^{j}\\ \left(\left(\Delta\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}=\left(\left(\Delta\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j-1}+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}\end{gathered}}$$

当 i=1 且 j=1 时，$\boxed{\left(\left(\Delta\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{1}\right)^{0}}=0$。

修改截面的当前作用力：

$$\boxed{\left(\left(\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}=\mathbf{D}^{k-1}(x)+\left(\left(\Delta\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}}$$

当 k=1 时，$\boxed{\mathbf{D}^{k-1}(x)=\mathbf{0}}$。

（9）计算截面变形增量的改变量

截面作用力增量的改变量的影响 $\boxed{\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}}$ 加上 j-1 步迭代末尾的截面残余变形等于截面变形增量的改变量：

$$\boxed{\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}=\left(\left(\mathbf{r}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j-1}+\left(\left(\mathbf{f}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j-1}\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}}$$

当 j=1 时，$\boxed{\left(\left(\mathbf{r}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{0}=\mathbf{0}}$。

则截面变形增量变为：

$$\boxed{\left(\left(\Delta\mathbf{d}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}=\left(\left(\Delta\mathbf{d}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j-1}+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}}$$

当 i=1 且 j=1 时，$\boxed{\left(\left(\Delta\mathbf{d}^{k}(x)\right)^{1}\right)^{0}=\mathbf{0}}$。

（10）计算纤维的变形增量

用截面兼容矩阵 $\boxed{\mathbf{l}(x)}$ 计算纤维变形增量的改变量，其相应的变形增量变为：

$$\boxed{\begin{gathered}\left(\left(\delta\Delta\mathbf{e}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}=\mathbf{l}(x)\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}\\ \left(\left(\Delta\mathbf{e}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}=\left(\left(\Delta\mathbf{e}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j-1}+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{e}^{k}(x)\right)^{i}\right)^{j}\end{gathered}}$$

纤维变形变为：

$$\left(\left(\mathbf{e}^k(x)\right)^i\right)^j = \mathbf{e}^{k-1}(x) + \left(\left(\Delta\mathbf{e}^k(x)\right)^i\right)^j$$

当 i=1 且 j=1 时，$\left(\left(\Delta\mathbf{e}^k(x)\right)^1\right)^0 = \mathbf{0}$。

（11）计算纤维应力，修改纤维的切线模量

根据纤维当前的变形 $\left(\left(\mathbf{e}^k(x)\right)^i\right)^j$，纤维材料模量推出新的纤维应力 $\left(\left(\mathbf{E}^k(x, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^i\right)^j$ 和修改后的纤维切线刚度模量 $\left(\left(E_{tan}^k(x, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^i\right)^j$。

（12）计算截面的切线刚度和柔度矩阵

修改后的纤维切线模量 $\left(\left(E_{tan}^k(x, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^i\right)^j$ 被用于计算截面当前的切线刚度矩阵：

$$\left(\left(\mathbf{k}^k(x)\right)^i\right)^j = \begin{bmatrix} \sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \cdot y_{ifib}^2 & -\sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \cdot y_{ifib} \cdot z_{ifib} & -\sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \cdot y_{ifib} \\ -\sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \cdot y_{ifib} \cdot z_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \cdot z_{ifib}^2 & \sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \cdot z_{ifib} \\ -\sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \cdot y_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \cdot z_{ifib} & \sum_{ifib=1}^{n(x)} (EA)_{ifib} \end{bmatrix}$$

其中，

$$(EA)_{ifib} = \left(\left(E_{tan}^k(x, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^i\right)^j \cdot A_{ifib}$$

$n(x)$ 时截面中纤维的总数。截面刚度矩阵的倒数是截面的柔度矩阵：

$$\left(\left(\mathbf{f}^k(x)\right)^i\right)^j = \left[\left(\left(\mathbf{k}^k(x)\right)^i\right)^j\right]^{-1}$$

（13）计算截面抵抗力

截面抵抗力由纤维应力 $\left(\left(\sigma^k(x, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^i\right)^j$ 和截面抵抗力之间的平衡决定。

$$\left(\left(\mathbf{D}_R^k(x)\right)^i\right)^j = \begin{Bmatrix} -\sum_{ifib=1}^{n(x)}\left(\left(\sigma^k(x, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^i\right)^j \cdot A_{ifib} \cdot y_{ifib} \\ \sum_{ifib=1}^{n(x)}\left(\left(\sigma^k(x, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^i\right)^j \cdot A_{ifib} \cdot z_{ifib} \\ \sum_{ifib=1}^{n(x)}\left(\left(\sigma^k(x, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^i\right)^j \cdot A_{ifib} \end{Bmatrix}$$

（14）计算截面的非平衡力

截面非平衡力由作用荷载和抵抗力之差得到：

$$\left(\left(\mathbf{D}_U^k(x)\right)^i\right)^j = \left(\left(\mathbf{D}^k(x)\right)^i\right)^j - \left(\left(\mathbf{D}_R^k(x)\right)^i\right)^j$$

检查非平衡力向量是否满足规定的截面容许误差。

（15）计算截面残余变形

$$\left(\left(\mathbf{r}^k(x)\right)^i\right)^j = \left(\left(\mathbf{f}^k(x)\right)^i\right)^j \cdot \left(\left(\mathbf{D}_U^k(x)\right)^i\right)^j$$

（16）计算单元柔度和刚度矩阵

单元柔度矩阵时截面柔度的数值之和：

$$\left(\left(\mathbf{F}^k\right)^i\right)^j = \sum_{nsec=1}^{m}\left[w_{nsec} \cdot \mathbf{b}^T(x_{nsec}) \cdot \left(\left(\mathbf{f}^k(x_{nsec})\right)^i\right)^j \cdot \mathbf{b}(x_{nsec})\right]$$

其中，m 是梁柱单元中测试截面的数量。x_{nsec} 是截面在局部参考系中的 x 坐标。

w_{nsec} 是相应的加权因子。单元刚度矩阵是柔度矩阵的倒数。

$$\left(\left(\mathbf{K}^k\right)^i\right)^j = \left[\left(\left(\mathbf{F}^k\right)^i\right)^j\right]^{-1}$$

（17）检查单元收敛性

当截面的所有非平衡力满足规定的截面容许误差时，单元收敛。由两种可能：

a) 如果满足收敛性，则继续（18）。

b) 如果不满足收敛性，则要计算单元的残余变形：

$$\left(\left(\mathbf{s}^k\right)^i\right)^j = \sum_{nsec}^{m}\left[w_{nsec} \cdot \mathbf{b}^T(x_{nsec}) \cdot \left(\left(\mathbf{r}(x_{nsec})^k\right)^i\right)^j\right],$$

迭代 j 增大 1 然后回到（6）。

（18）计算结构抵抗力，修改结构刚度矩阵

当所有单元都满足收敛性时，第 i 步 Newton-Raphson 迭代就完成了。利用表达式

$$\boxed{\left(\mathbf{P}_R^k\right)^i = \sum_{ele=1}^{n} \mathbf{L}_{ele}^T \cdot \left(\mathbf{Q}^k\right)_{ele}^i},$$

可以通过所有单元的抵抗力 $\boxed{\left(\mathbf{Q}^k\right)_{ele}^i}$ 的集合计算结构的抵抗力 $\boxed{\left(\mathbf{P}_R^k\right)^i}$。

结构切线刚度矩阵由单元刚度矩阵组集得到：

$$\boxed{\left(\mathbf{K}_s^k\right)^i = \sum_{ele=1}^{n} \mathbf{L}_{ele}^T \cdot \left(\mathbf{K}^k\right)_{ele}^i \cdot \mathbf{L}_{ele}}。$$

（19）计算结构的非平衡力

结构的非平衡力由总的作用荷载和总的抵抗力之差得到：

$$\boxed{\left(\mathbf{P}_U^k\right)^i = \mathbf{P}_E^k - \left(\mathbf{P}_R^k\right)^i}$$

其中，$\boxed{\mathbf{P}_E^k}$ 由 k-1 步荷载步末尾的总作用荷载和当前的荷载增量来决定

$$\boxed{\mathbf{P}_E^k = \mathbf{P}_E^{k-1} + \Delta\mathbf{P}_E^k}$$

当 k=1 时，$\boxed{\mathbf{P}_E^0 = \mathbf{0}}$。

（20）检查结构的收敛性

如果结构的非平衡力满足规定的容许误差，则结构收敛。相似地，由两种可能：

a) 如果不满足收敛性，i 增大 1，然后回到（3），开始下一步 Newton-Raphson 迭代。

b) 如果满足收敛性，则第 k 步荷载步就完成了,继续（21）。

（21）修改作用力和变形增量，开始新的荷载步

所有的作用力和变形向量都是由第 k 步荷载步的向量增量加上 k-1 步荷载步末尾相应的总作用力和总变形得到的。

$$\boxed{\begin{gathered}
\mathbf{p}^k = \mathbf{p}^{k-1} + \Delta\mathbf{p}^k \\
\mathbf{q}^k(x) = \mathbf{q}^{k-1}(x) + \Delta\mathbf{q}^k(x) \\
\mathbf{d}^k(x) = \mathbf{d}^{k-1}(x) + \Delta\mathbf{d}^k(x) \\
\textbf{update } \mathbf{E}^{k-1}(x) \textbf{ to } \mathbf{E}^k(x) \\
\mathbf{e}^k(x) = \mathbf{e}^{k-1}(x) + \Delta\mathbf{e}^k(x)
\end{gathered}}$$

在这个意义上，由两种可能：

a) k=kn，整个外部荷载 $\boxed{\mathbf{P}_E}$ 都生效，分析完成。

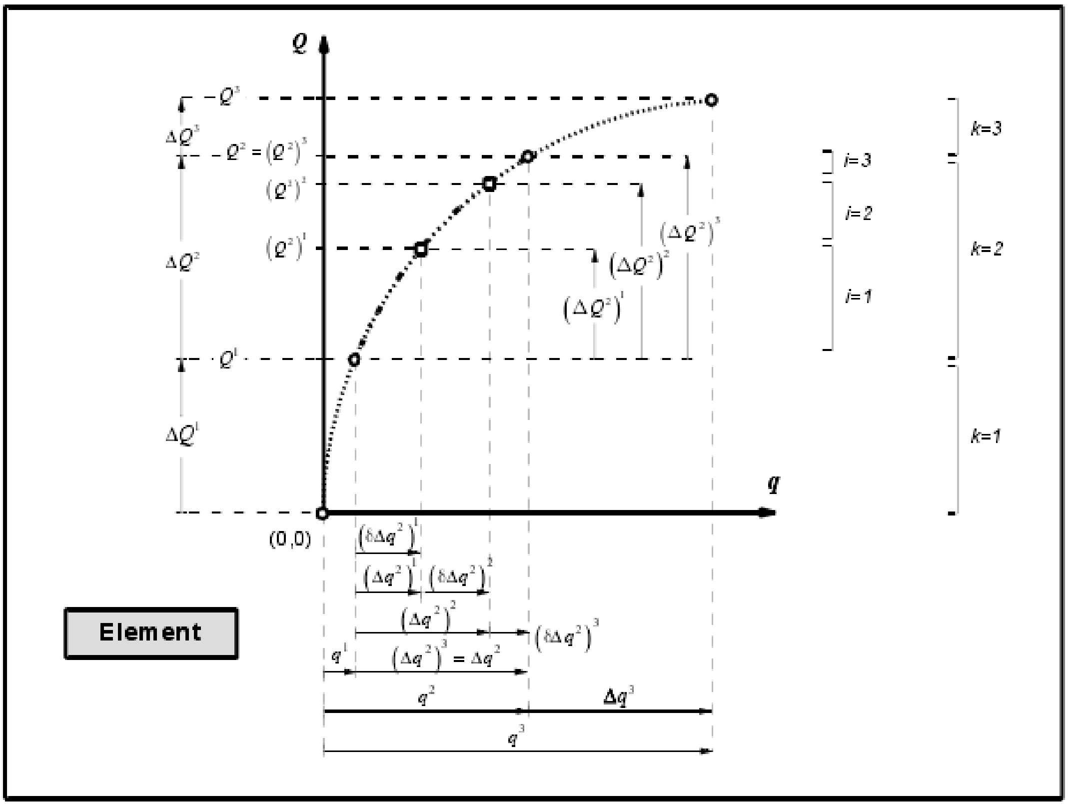
b) k<kn，k 增大 1，计算新的结构非平衡力向量，然后回到（2）。

这个总结提到纤维梁柱单元的杰出应用，这些应用和 FEAP 程序中的应用在

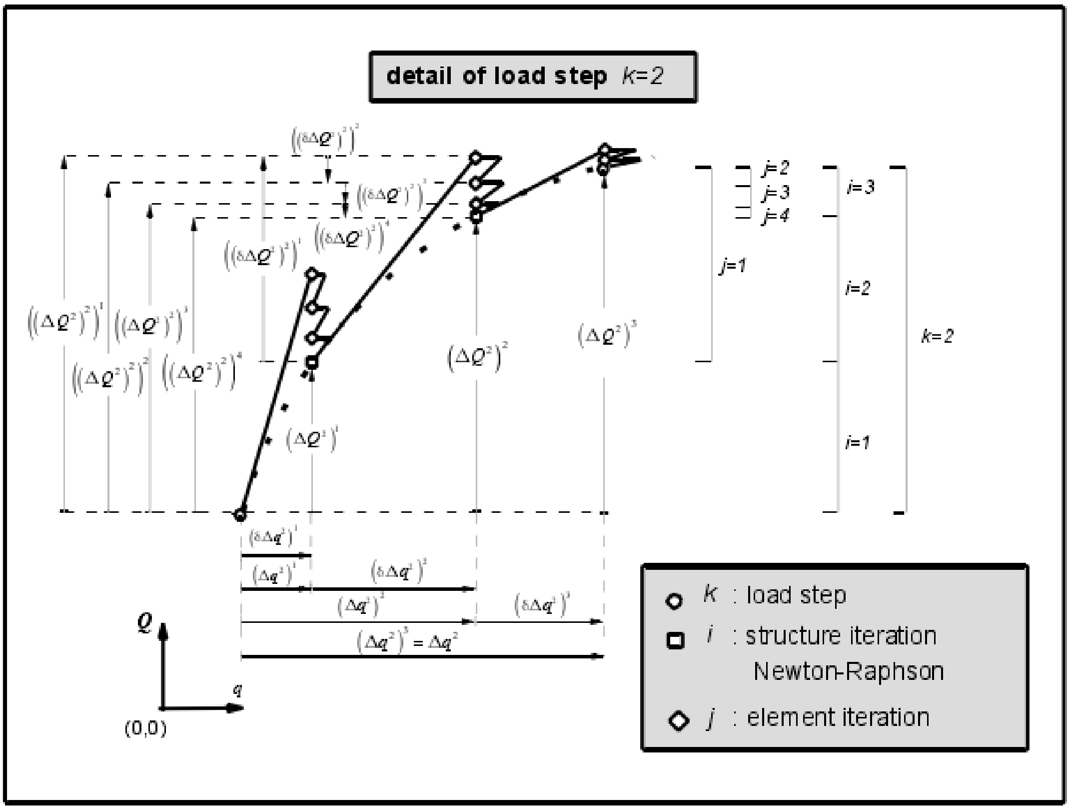
一些方面有所不同。FEAP 程序中变量的修改遵循 2.5 和 3.6 节中的总结及相应的数据。单元和结构层次的收敛性标准是不同的，就像第 4 章所谈论的那样：这个杰出的程序通过监测截面的非平衡力检查单元收敛性，但通过监测总体自由度来检查结构收敛性。而在 FEAP 程序中，单元和结构的收敛性都是通过监测增量来检查的。后一种方法比较普遍，特别适合接近临界荷载能力的结构，这在 4.5 节中讨论过。

非线性解法的步骤见图 A.1~A.4。图 A.1 描述的是结构的荷载—位移发展史。结构经历了三个荷载步增量 $\boxed{\Delta \mathbf{P}_E^k}$。每一个荷载步用三次 Newton-Raphson 迭代来达到满足平衡性和相容性条件的结构状态收敛性。图 A.2、A.3、A.4 分别描述了在单元、截面、纤维内相应的力—变形的发展史。每张图包括两条曲线。上面的曲线展示了完整的荷载历史，而下面的曲线强调了第二个荷载步（k=2）。特殊的标记符号表示结构、单元、截面和纤维的状态。圆圈表示结构上的收敛状态。正方形表示单元上的收敛状态。棱形表示一种在单元内满足平衡性和相容性，但违反截面的作用力—变形关系的不收敛的中间状态。在每一次 Newton-Raphson 迭代循环 i 的末尾，正方形代替了棱形；在每一步荷载步 k 的末尾，圆形代替了正方形。正方形和圆形出现在所有层次中，例如，结构、单元、截面和纤维。棱形只出现在单元、截面和纤维中，因为他们涉及单元中的迭代循环。

重要的是要注意，作用力和变形向量不在所有单元中具有收敛性的每一步 Newton-Raphson 迭代末尾修改，而是在结构具有收敛性的每一步荷载步末尾修改。对纤维的本构关系来说，修改的过程非常重要。纤维的抵抗力和切线模量是基于前一步荷载步的总应变 $\boxed{\varepsilon^{k-1}(x_{nsec}, y_{ifib}, z_{ifib})}$ 和当前的应变增量 $\boxed{\left(\left(\Delta\varepsilon^{k}(x_{nsec}, y_{ifib}, z_{ifib})\right)^{i}\right)^{j}}$ 计算的。这个过程保证了非线性解法的独立路径。它的一个优点是当不收敛时，分析会在前一步收敛的荷载步中增加小的增量重新开始。在这个程序和 FEAP 程序中都是用这种修改程序。

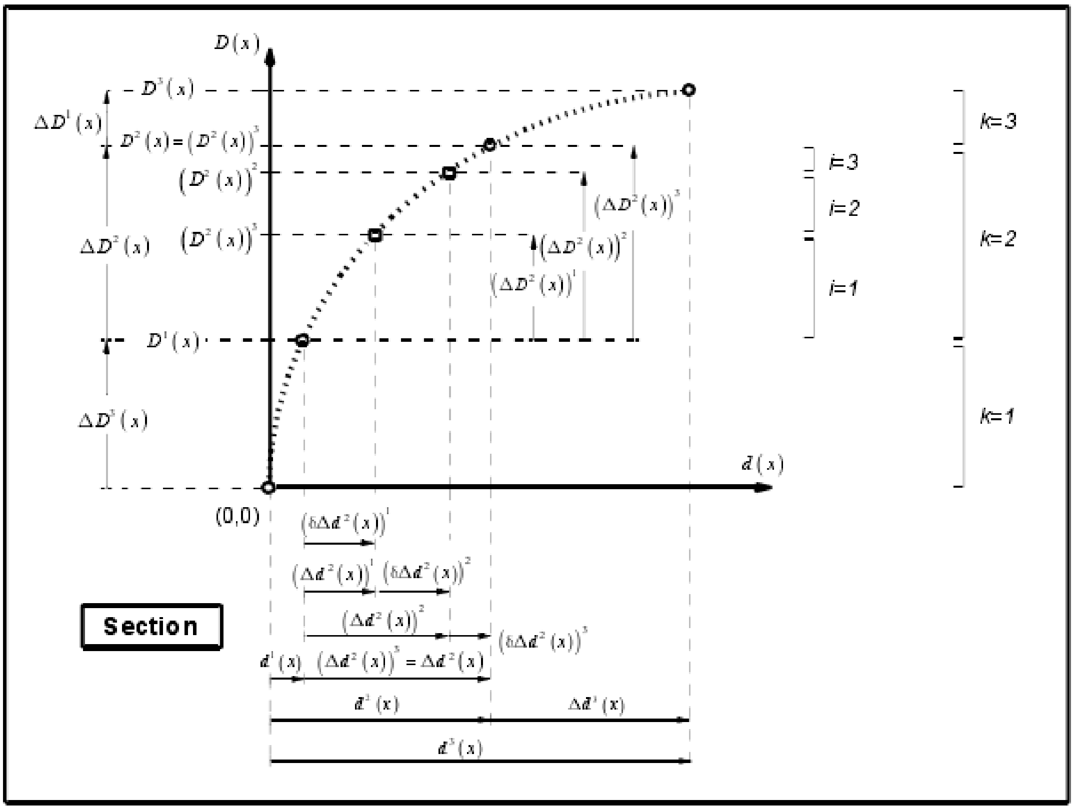


A) THREE LOAD STEPS

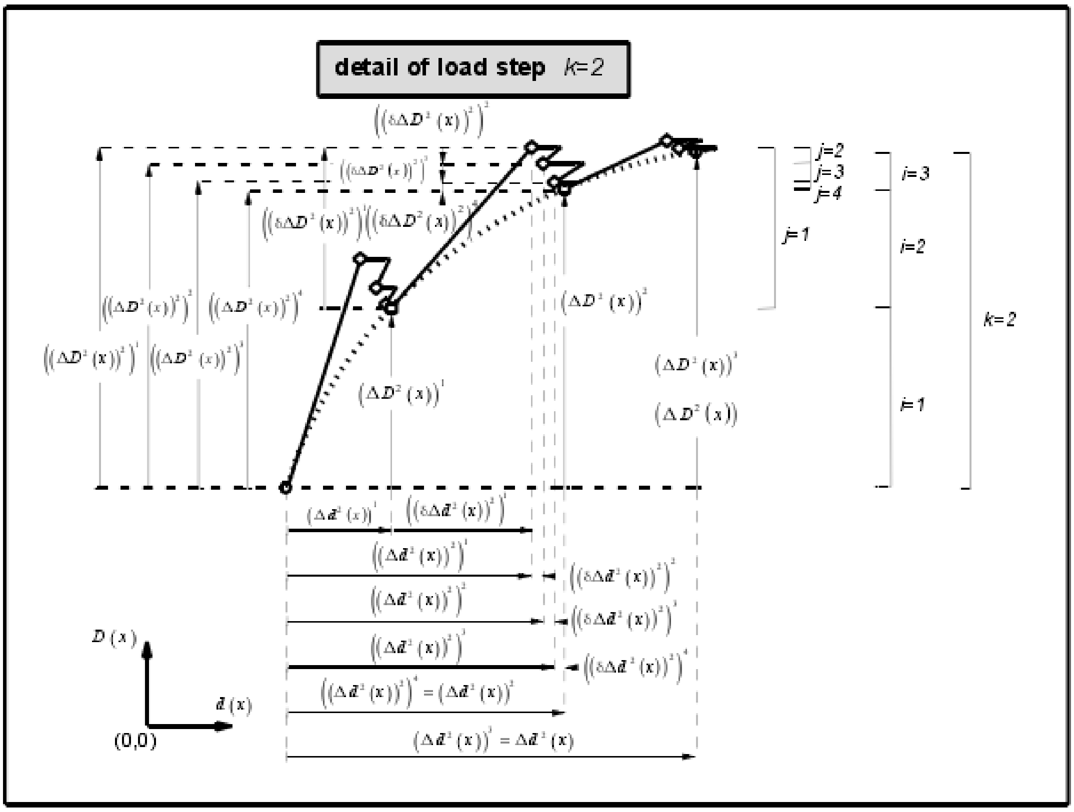


B) DETAIL OF LOAD STEP k=2

FIGURE A.2 FORCE-DEFORMATION HISTORY AT THE ELEMENT LEVEL

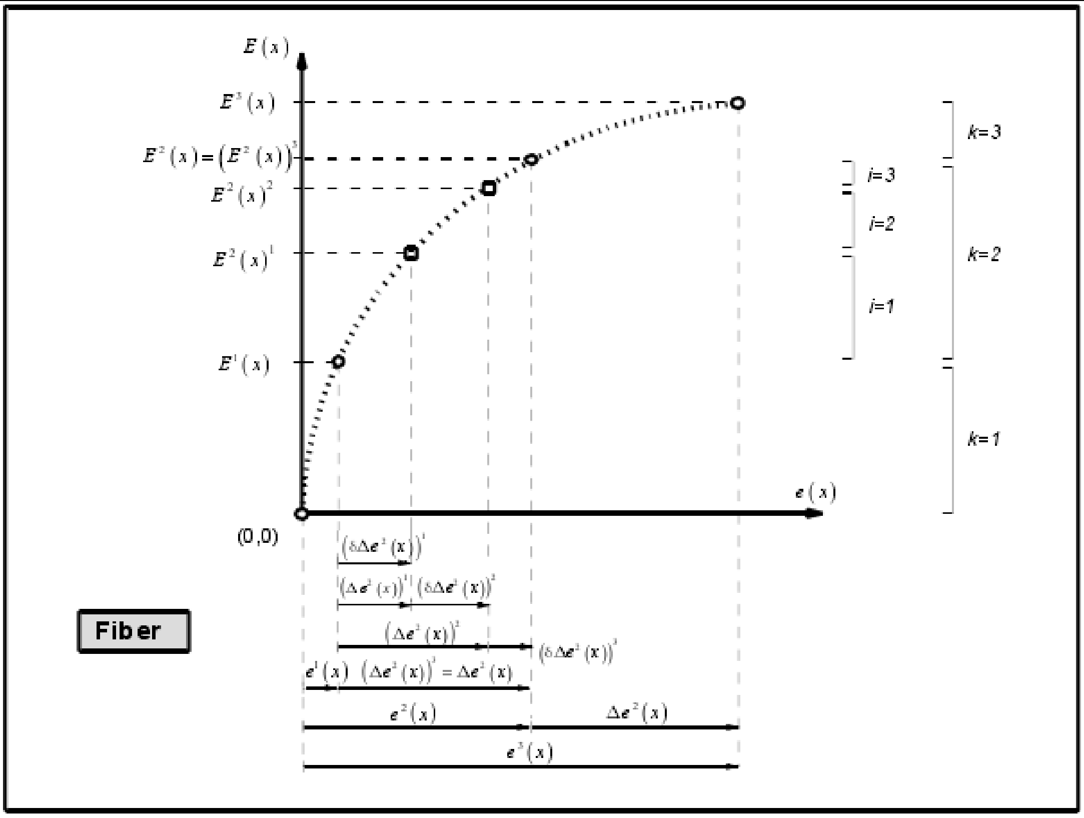


A) THREE LOAD STEPS

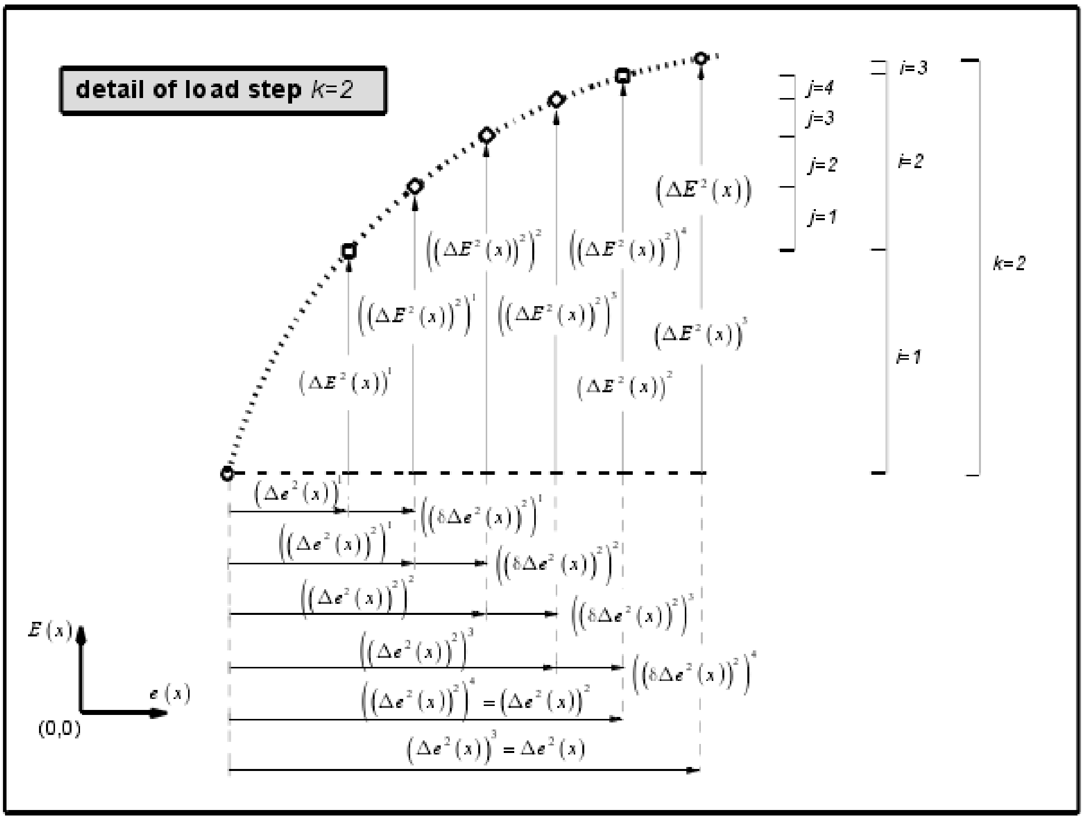


B) DETAIL OF LOAD STEP k=2

FIGURE A.3 FORCE-DEFORMATION HISTORY AT THE SECTION LEVEL



A) THREE LOAD STEPS



B) DETAIL OF LOAD STEP $k=2$

FIGURE A.4 FORCE-DEFORMATION HISTORY AT THE FIBER LEVEL

附录 B

均布荷载在线弹性悬臂梁中的应用

这个附录展现了 4.5 节中那个简单的例子所包含的计算步骤。图 4.2 展示了承受均布竖直荷载的线弹性悬臂梁。图 B.1、B.2 与图 4.3、4.4 相似，但包含了更多关于求解过程中变量发展的信息。第 4 章的上标符号表示结构和单元层次的迭代过程：k 表示荷载步，i 表示结构层次的 Newton-Raphson 迭代循环，j 表示单元层次的循环。这里，刚度和柔度矩阵不需要上标，因为它们在线弹性单元内不会变化。第 2、3 章介绍了在这个例子中使用的基于弹性的求解方法。

均布荷载在线弹性悬臂梁中的应用包含以下系列计算步骤：

k=1

i=1

$$\Delta \mathbf{P}_g^1 = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{P}_U^1\right)^1 = \mathbf{0}$$

$$\left(\delta\Delta\mathbf{p}^1\right)^1 = \mathbf{0}$$

$$\left(\delta\Delta\mathbf{q}^1\right)^1 = \mathbf{0}$$

j=1

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^1 = \mathbf{K}\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{q}^1\right)^1\right)^1 = \mathbf{0}$$

$$\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^1 = \mathbf{0}$$

$$\left(\left(\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^1 = \mathbf{0}$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1 = \mathbf{b}_g(x)\cdot\mathbf{W} = \begin{bmatrix}\frac{w_y}{2}x\left(x-L\right) & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(L/2)\right)^1\right)^1 = \begin{bmatrix}-\frac{w_y}{8}L^2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1 = \mathbf{0} + \left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1$$

$$\left(\left(\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1 = \mathbf{0} + \left(\left(\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1$$

$$\left(\left(\mathbf{D}^1(L/2)\right)^1\right)^1 = \begin{bmatrix}-\frac{w_y}{8}L^2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^1\right)^1 = \mathbf{f}(x)\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1$$

$$\left(\left(\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^1\right)^1 = \mathbf{0}$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

因为单元是线弹性的，所以有：

$$\left(\left(\mathbf{D}_R^1(x)\right)^1\right)^1=\left(\left(\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1$$

$$\left(\left(\mathbf{D}_U^1(x)\right)^1\right)^1=\left(\left(\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1-\left(\left(\mathbf{D}_R^1(x)\right)^1\right)^1=\mathbf{0}$$

$$\left(\left(\mathbf{r}^1(x)\right)^1\right)^1=\mathbf{f}(x)\cdot\left(\left(\mathbf{D}_U^1(x)\right)^1\right)^1+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^1\right)^1=\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^1\right)^1$$

单元没有满足收敛性，计算 $\boxed{\left(\left(\mathbf{s}^1\right)^1\right)^1}$

***j*=2**

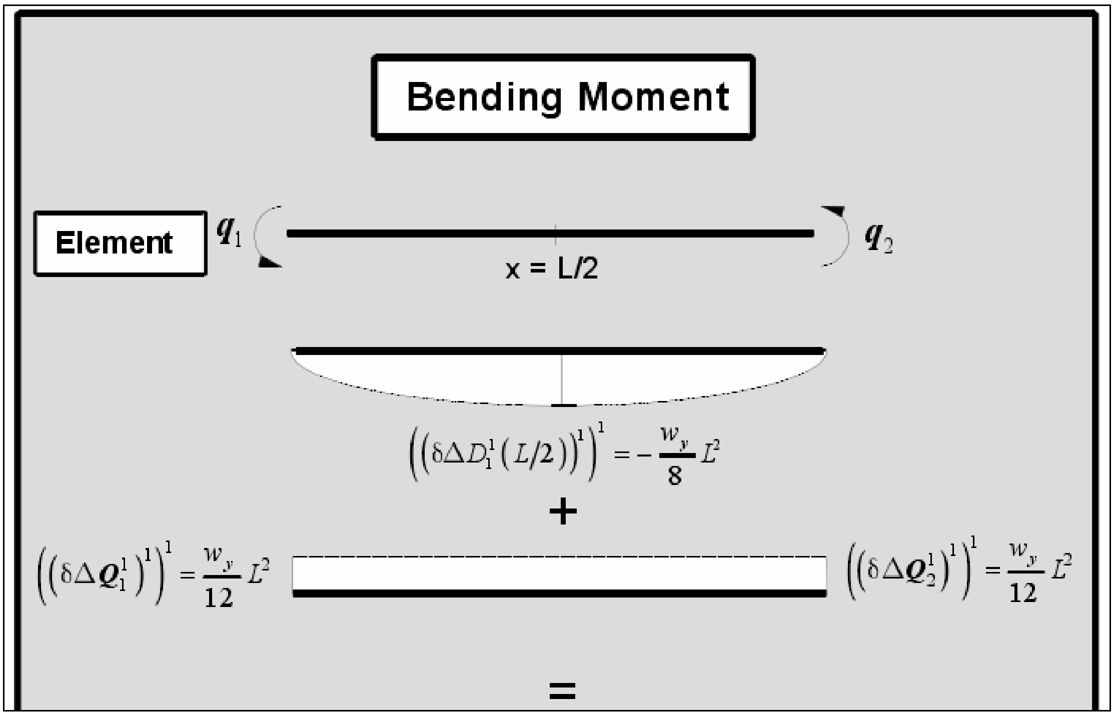
$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^2=-\mathbf{K}\cdot\left(\left(\mathbf{s}^1\right)^1\right)^1=\begin{bmatrix}-\frac{w_yL^2}{12} & \frac{w_yL^2}{12} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^2=\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^1+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^2=\begin{bmatrix}-\frac{w_yL^2}{12} & \frac{w_yL^2}{12} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^2=\mathbf{0}+\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^2=\begin{bmatrix}-\frac{w_yL^2}{12} & \frac{w_yL^2}{12} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^2=\mathbf{b}(x)\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1\right)^2$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(L/2)\right)^1\right)^2=\begin{bmatrix}\frac{w_y}{12}L^2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$



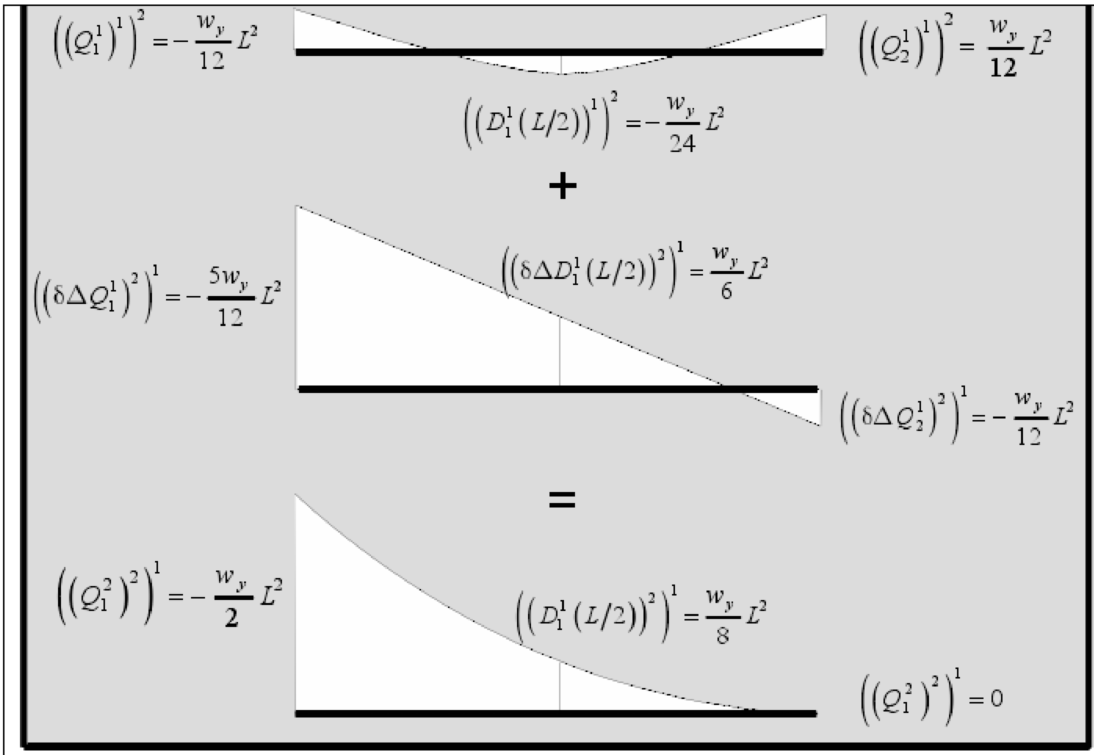


FIGURE B.1 CANTILEVER UNDER UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD: BENDING MOMENT HISTORY

$$\left(\left(\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^2 = \left(\left(\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^1 + \left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^2$$

$$\left(\left(\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^2 = \mathbf{0} + \left(\left(\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^2$$

$$\left(\left(\mathbf{D}^1(L/2)\right)^1\right)^2 = \begin{bmatrix} -\frac{w_y}{24}L^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^1\right)^2 = \left(\left(\mathbf{r}^1(x)\right)^1\right)^1 + \mathbf{f}(x)\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^2$$

$$\left(\left(\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^1\right)^2 = \mathbf{0} + \left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^1\right)^2$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

因为单元是线弹性的，所以有：

$$\left(\left(\mathbf{D}_R^1(x)\right)^1\right)^2 = \left(\left(\mathbf{D}^1(x)\right)^1\right)^2$$

$$\left(\left(\mathbf{D}_U^1(x)\right)^1\right)^2 = \mathbf{0}$$

$$\left(\left(\mathbf{r}^1(x)\right)^1\right)^2 = \mathbf{f}(x)\cdot\left(\left(\mathbf{D}_U^1(x)\right)^1\right)^1 = \mathbf{0}$$

单元满足收敛性

$$\left(\bar{\mathbf{Q}}^1\right)^1 = \begin{bmatrix} -\frac{w_y L^2}{12} & \frac{w_y L^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\left(\bar{\mathbf{Q}}^1\right)^1 = \left(\bar{\mathbf{Q}}^1\right)^1 + \mathbf{t}_g\cdot\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\frac{w_y L^2}{12} & \frac{w_y L^2}{12} & 0 & 0 & 0 & -\frac{w_y L}{2} & -\frac{w_y L}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$\left(\mathbf{P}_R^1\right)^1 = \bar{\mathbf{L}}\cdot\left(\bar{\mathbf{Q}}^1\right)^1 = \begin{bmatrix} \frac{w_y L^2}{12} & -\frac{w_y L}{2} \end{bmatrix}^T$$

$$\left(\mathbf{P}_U^1\right)^1 = \mathbf{P}_E^1 - \left(\mathbf{P}_R^1\right)^1 = \mathbf{0} - \left(\mathbf{P}_R^1\right)^1 = \begin{bmatrix} -\frac{w_y L^2}{12} & \frac{w_y L}{2} \end{bmatrix}^T$$

i=2

$$\mathbf{K}\cdot\left(\delta\Delta\mathbf{p}^1\right)^2 = \left(\mathbf{P}_U^1\right)^2$$

$$\left(\Delta\mathbf{p}^1\right)^2 = \left(\Delta\mathbf{p}^1\right)^1 + \left(\delta\Delta\mathbf{p}^1\right)^2 = \mathbf{0} + \left(\delta\Delta\mathbf{p}^1\right)^2$$

$$\left(\delta\Delta\mathbf{q}^1\right)^2 = \mathbf{L}_1\cdot\left(\delta\Delta\mathbf{p}^1\right)^2$$

$$\left(\Delta\mathbf{q}^1\right)^2 = \left(\Delta\mathbf{q}^1\right)^1 + \left(\delta\Delta\mathbf{q}^1\right)^2$$

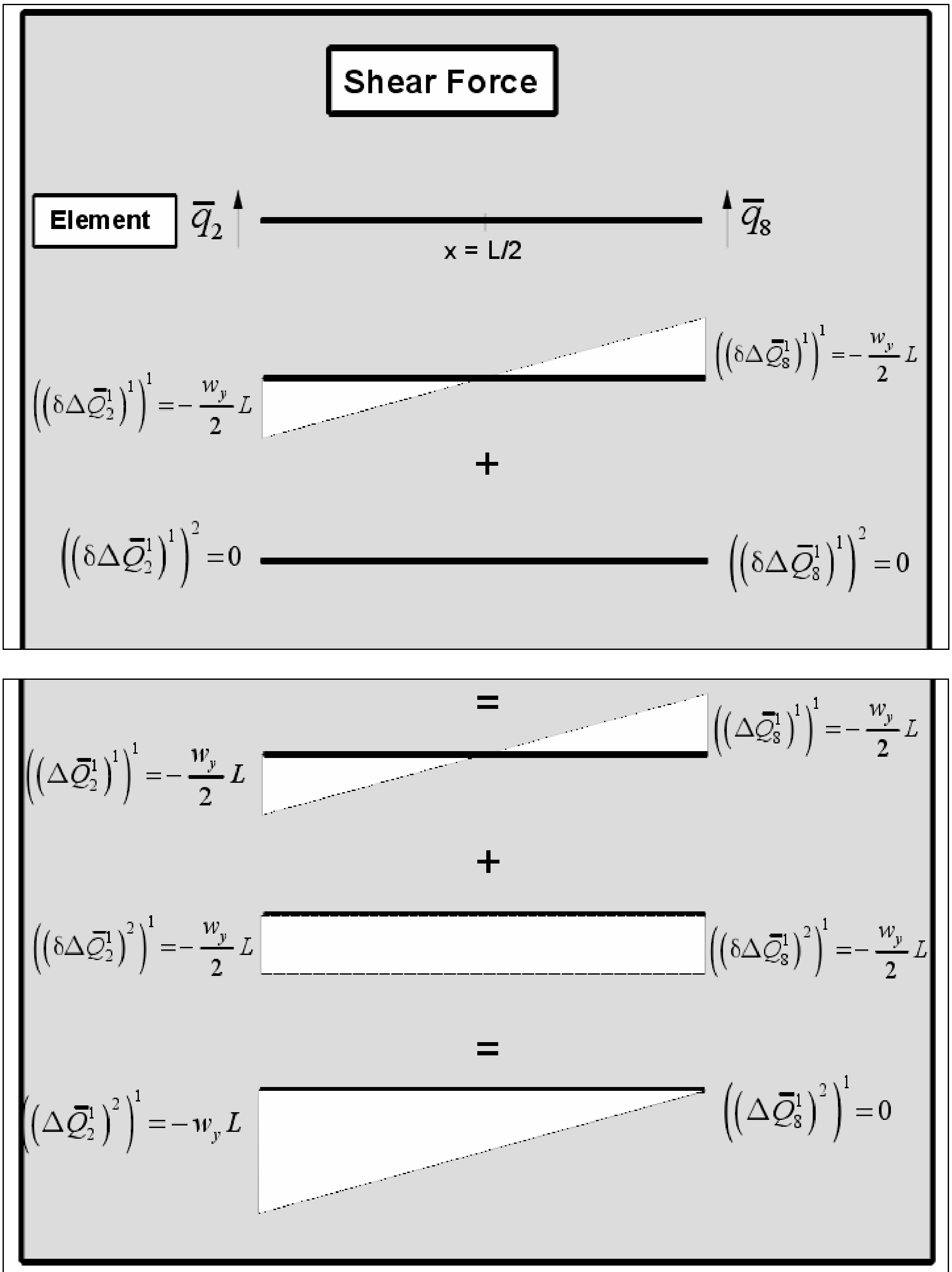


FIGURE B.2 CANTILEVER WITH UNIFORMLY DISTRIBUTED LOAD: SHEAR FORCE HISTORY

j=1

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^1\right)^2\right)^1=\mathbf{K}\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{q}^1\right)^2\right)^1=\begin{bmatrix}-\frac{5w_yL^2}{12} & -\frac{w_yL^2}{12} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^1\right)^2\right)^1=\left(\Delta\mathbf{Q}^1\right)^1+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^1\right)^2\right)^1=\begin{bmatrix}-\frac{w_yL^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\mathbf{Q}^1\right)^2\right)^1=\mathbf{0}+\left(\left(\Delta\mathbf{Q}^1\right)^2\right)^1=\begin{bmatrix}-\frac{w_yL^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^2\right)^1=\mathbf{b}(x)\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{Q}^1\right)^2\right)^1$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(L/2)\right)^2\right)^1=\begin{bmatrix}\frac{w_y}{6}L^2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^2\right)^1=\left(\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^1+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^2\right)^1$$

$$\left(\left(\mathbf{D}^1(x)\right)^2\right)^1=\mathbf{0}+\left(\left(\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^2\right)^1$$

$$\left(\left(\mathbf{D}^1(L/2)\right)^2\right)^1=\begin{bmatrix}\frac{w_y}{8}L^2 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^2\right)^1=\mathbf{0}+\mathbf{f}(x)\cdot\left(\left(\delta\Delta\mathbf{D}^1(x)\right)^2\right)^1$$

$$\left(\left(\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^2\right)^1=\left(\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^1+\left(\left(\delta\Delta\mathbf{d}^1(x)\right)^2\right)^1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

因为单元是线弹性的，所以有：

$$\left(\left(\mathbf{D}_R^1(x)\right)^2\right)^1=\left(\left(\mathbf{D}^1(x)\right)^2\right)^1$$

$$\left(\left(\mathbf{D}_U^1(x)\right)^2\right)^1=\mathbf{0}$$

$$\left(\left(\mathbf{r}^1(x)\right)^2\right)^1=\mathbf{0}$$

单元满足收敛性

$$\left(\bar{\mathbf{Q}}^1\right)^2=\begin{bmatrix}-\frac{w_yL^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{w_yL}{2} & \frac{w_yL}{2} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\bar{\mathbf{Q}}^1\right)^2=\left(\bar{\mathbf{Q}}^1\right)^2+\mathbf{t}_g\cdot\mathbf{W}=\begin{bmatrix}-\frac{w_yL^2}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -w_yL & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}^T$$

$$\left(\mathbf{P}_R^1\right)^2 = \bar{\mathbf{L}} \cdot \left(\bar{\mathbf{Q}}^1\right)^2 = \mathbf{0}$$

$$\left(\mathbf{P}_U^1\right)^2 = \mathbf{P}_E^2 - \left(\mathbf{P}_R^1\right)^2 = \mathbf{0}$$

结构满足收敛性

修改向量

$$\mathbf{p}^1 = \mathbf{p}^0 + \Delta\mathbf{p}^1 = \Delta\mathbf{p}^1$$
$$\mathbf{q}^1(x) = \mathbf{q}^0(x) + \Delta\mathbf{q}^1(x) = \Delta\mathbf{q}^1(x)$$
$$\mathbf{d}^1(x) = \mathbf{d}^0(x) + \Delta\mathbf{d}^1(x) = \Delta\mathbf{d}^1(x)$$
$$update\ \ \mathbf{E}^0(x) = \mathbf{0}\ \ \mathbf{to}\ \ \mathbf{E}^1(x)$$
$$\mathbf{e}^1(x) = \mathbf{e}^0(x) + \Delta\mathbf{e}^1(x) = \Delta\mathbf{e}^1(x)$$

分析结束

附录 C

一个简单软化系统中求解算法的应用

利用图 4.5 所示的两个伸长的弹簧串联的简单系统的帮助，说明了确定单元状态的非线性求解算法。一个弹簧是线弹性的，另一个是线弹性应变软化的（linear elastic-strain softening）。就像第 4 章所讨论的，二弹簧系统的平衡性和相容性推导出下列关系：

$$Q = D_A = D_B$$

$$q = q_A + q_B$$

$$F = f_A + f_B$$

在这个说明性的分析中，施加一个独立的变形增量 $\boxed{\Delta q}$，试图求出相应的抵抗力增量 $\boxed{\Delta Q}$。因此，没有必要使用上标 k 和 i，仅仅描绘单元层次循环序列的上标 j 就足够描述系统变量的求解。上标 i 仅用一次来表明单元变形已经修改。因为假定系统刚开始时没有应力的，所以把初始状态描述成：

$$Q^{i=0} = 0$$

$$q^0 = 0$$

$$d_A^0 = d_B^0 = 0$$

$$f_A^0 = f_{A,el}$$

$$f_B^0 = f_{B,el}$$

$$F^0 = f_A^0 + f_B^0$$

$$K^0 = \left[F^0\right]^{-1}$$

图 4.6 描述了二弹簧系统非线性分析的步骤。首先，施加变形增量 $\boxed{\Delta q}$。在循环中，为了满足相容性要求，增量保持不变。单元的总变形变为：

$$\boxed{q^{i=1} = q^{i=0} + \Delta q^{i=1} = 0 + \Delta q = \Delta q}$$

然后单元循环开始：

J=1，基于初始单元刚度 $\boxed{K^0}$，由 $\boxed{\Delta q}$对单元的作用力增量 $\boxed{\Delta Q^1}$ 做个初始估

算。确定由这个伸长弹簧中的作用力增量引起的变形增量：

$$\Delta Q^1 = K^0 \cdot \Delta q$$

$$Q^1 = Q^0 + \Delta Q^1 = \Delta Q^1$$

$$\Delta D^1_{\mathrm{A}} = \Delta D^1_{\mathrm{B}} = \Delta Q^1$$

$$\Delta d^1_{\mathrm{A}} = f^0_{\mathrm{A}} \cdot \Delta D^1_{\mathrm{A}}$$

$$\Delta d^1_{\mathrm{B}} = f^0_{\mathrm{B}} \cdot \Delta D^1_{\mathrm{B}}$$

修改弹簧的变形和作用力，确定弹簧新的柔度

$$d^1_{\mathrm{A}} = d^0_{\mathrm{A}} + \Delta d^1_{\mathrm{A}} + r^0_{\mathrm{A}} = \Delta d^1_{\mathrm{A}}$$

$$d^1_{\mathrm{B}} = d^0_{\mathrm{B}} + \Delta d^1_{\mathrm{B}} + r^0_{\mathrm{B}} = \Delta d^1_{\mathrm{B}}$$

$$D^1_{\mathrm{A}} = D^0_{\mathrm{A}} + \Delta D^1_{\mathrm{A}} = \Delta D^1_{\mathrm{A}}$$

$$D^1_{\mathrm{B}} = D^0_{\mathrm{B}} + \Delta D^1_{\mathrm{B}} = \Delta D^1_{\mathrm{B}}$$

$$f^1_{\mathrm{A}} = f_{\mathrm{A},e1}$$

$$f^1_{\mathrm{B}} = f_{\mathrm{B},p1}$$

其中，r^0 是弹簧的初始残余变形，r^0=0。计算弹簧抵抗力 $D^1_{\mathrm{A_R}}$ 和 $D^1_{\mathrm{B_R}}$，以及相应的非平衡力：

$$D^1_{\mathrm{A_U}} = D^1_{\mathrm{A}} - D^1_{\mathrm{A_R}} = D^1_{\mathrm{A}} - D^1_{\mathrm{A}} = 0$$

$$D^1_{\mathrm{B_U}} = D^1_{\mathrm{B}} - D^1_{\mathrm{B_R}}$$

计算弹簧的残余变形 r^1_{A} 和 r^1_{B}：

$$r^1_{\mathrm{A}} = f^1_{\mathrm{A}} \cdot D^1_{\mathrm{A_U}} = 0$$

$$r^1_{\mathrm{B}} = f^1_{\mathrm{B}} \cdot D^1_{\mathrm{B_U}}$$

修改单元的柔度和刚度矩阵：

$$F^1 = f^1_{\mathrm{A}} + f^1_{\mathrm{B}}$$

$$K^1 = \left[F^1\right]^{-1}$$

检查单元的收敛性：弹簧 B 有明显的非平衡力，因此单元不满足收敛性。计

算单元残余变形 $\boxed{s^1}$：

$$s^1 = r_A^1 + r_B^1 = r_B^1$$

j=2

开始新的单元循环。利用 j=1 阶段末尾的单元残余变形计算新的单元作用力增量：

$$\Delta Q^2 = -K^1 \cdot s^1$$

$$Q^2 = Q^1 + \Delta Q^2$$

$$\Delta D_A^2 = \Delta D_B^2 = \Delta Q^2$$

$$\Delta d_A^2 = f_A^1 \cdot \Delta D_A^2$$

$$\Delta d_B^2 = f_B^1 \cdot \Delta D_B^2$$

修改弹簧的变形和作用力，确定弹簧新的柔度：

$$d_A^2 = d_A^1 + \Delta d_A^2 + r_A^1 = d_A^1 + \Delta d_A^2$$

$$d_B^2 = d_B^1 + \Delta d_B^2 + r_B^1$$

$$D_A^2 = D_A^1 + \Delta D_A^2$$

$$D_B^2 = D_B^1 + \Delta D_B^2$$

$$f_A^2 = f_{A,el}$$

$$f_B^2 = f_{B,pl}$$

计算弹簧抵抗力 $\boxed{D_{A_R}^2}$ 和 $\boxed{D_{B_R}^2}$，以及相应的非平衡力：

$$D_{A_U}^2 = D_A^2 - D_{A_R}^2 = 0$$

$$D_{B_U}^2 = D_B^2 - D_{B_R}^2 = 0$$

计算弹簧残余变形 $\boxed{r_A^2}$ 和 $\boxed{r_B^2}$ ：

$$r_A^2 = f_A^2 \cdot D_{A_U}^2 = 0$$

$$r_B^2 = f_B^2 \cdot D_{B_U}^2 = 0$$

修改单元的柔度和刚度矩阵：

$$F^2 = f_A^2 + f_B^2$$

$$K^2 = \left[F^2\right]^{-1}$$

检查单元的收敛性：两个弹簧都没有非平衡力，因此，单元满足收敛性，分析完成。