

第二章

关于钢筋混凝土平面应力结构有限元分析的文献回顾

本章回顾了由平面应力单元组成的钢筋混凝土结构基于各种模型的模拟。2.1 节回顾以往关于钢筋混凝土性能预测分析模型的研究，特别是由休斯顿大学开发的一系列模型。讨论了一些重要的本构模型的特性和非线性有限元分析。2.2 节和 2.3 节分别阐述了循环软化膜模型 (CSMM) (Mansour and Hsu 2005a and 2005b) 和面向对象有限元程序 OpenSees 框架 (Fenves 2001)。最后 2.4 节对本章内容做了总结。

2.1 文献回顾

关于钢筋混凝土平面应力结构的非线性有限元分析已经提出了很多分析模型。这些模型中包括了桁架模型，各向正交异性模型，非线性弹性模型，塑性模型和微观模型等等。ASCE Task 委员会和 ASCE/ACI 委员会已经对这些模型做了总结回顾。在这些模型中，与其他模型相比，只有各向正交异性模型同时考虑了精确性和经济性。为了联系本文所研究的内容，阐述了以往对钢筋混凝土各向正交异性模型的研究及这些模型在钢筋混凝土平面应力结构中的应用。

2.1.1 以往其他学者的研究

Vecchio 和 Collins (1981 and 1982) 提出基于旋转裂缝法的压力场原理 (CFT)。在此模型中，正交异性的方向分别垂直和平行于主应变方向，且在加载过程中连续变化。由于假设混凝土拉应力为 0，CFT 没有考虑混凝土的拉伸硬化。因此 CFT 能够预测试件的破坏荷载而不能预测受剪刚度。1986 年，CFT 经过修改变成修正压力场原理 (MCFT) (Vecchio and Collins, 1986)，它包括了混凝土在拉力作用下的各种关系，以此更好地建立受剪刚度模型。Vecchio (1989 and 1990) 发表了 MCFT 的有限元公式。在 MCFT 中，开裂钢筋混凝土被当作各向异性材料，其主轴位于主应变的方向。在混凝土开裂后，忽略泊松效应。整个有限元过程基于迭代和割线刚度。该模型被用来预测面板试验和深梁试验的单调响应。面板试验响应和分析响应普遍符合得很好。

Balakrishnan 和 Murray (1988c) 同过采用他们自己的本构关系 (Balakrishnan and Murray, 1988a and 1988b) 提出了一种旋转裂缝模型来预测剪力板和深梁的单调行为。当混凝土出现裂缝后，泊松比设为 0。该模型被 Vecchio 和 Collins (1982) 用来预测许多面板试验及配有和未配腹筋的钢筋混凝土深梁的行为。

Crisfield 和 Wills (1989) 采用不同的材料模型对由 Vecchio 和 Collins (1982) 开展的许多钢筋混凝土板试验进行了分析。模型包括了固定裂缝模型，摇摆裂缝模型和简化的塑性模型。固定裂缝模型定义正交裂缝的方向由超过混凝土开裂应力的第一主应力方向控制。摇摆裂缝模型是一种旋转裂缝模型，它假设主应力和主应变方向重合，其主轴被定义为主应变的方向。塑性模型在压力作用下有一个矩形屈服面，在此范围内不允许有拉力。作者对板的这三种模型进行了广泛的研究，并把分析结果和试验结果进行了对比。作者同时验证了固定裂缝和旋转裂缝模型之间的差别。本文中的有限元程序是基于迭代和切线刚度公式上的。需要指出的是数值求解方法引用的是弧长方法，它能获得包括下降段在内的完整的单调加载相对变形响应。

Ayoub 和 Fillippou (1998) 提出了一种旋转裂缝模型，它是对 Vecchio (1990) 和 Balakrishnan、Murray (1988a, 1988b, 1988c) 的各向正交异性模型的一种延伸。Vecchio 和 Collins (1982) 的面板试验及 Cervenka 和 Gerstle (1971) 的剪力墙试验都在相关的研究中被引用。对分析和试验结果进行了很好的比较。作者指出用传统的 Newton-Raphson 迭代分析方

法来判断破坏强度是不可能的，因为数值模拟过程中的收敛失败将会被错误地当作材料破坏。作者采用线性平面弧长模型（Crisfield1982）解决数值问题，并得到了完整的板件的剪应力应变响应。

Kaufmann 和 Marti(1998)提出了开裂膜模型(CMM),它综合了 MCFT 模型和拉伸硬化模型。采用在开裂表面具有平衡性的裂缝之间的逐步的，完全刚塑性混凝土-钢筋粘结滑移关系，建立混凝土拉伸硬化模型。Foster 和 Marti(2003)把 CMM 补充进有限元公式，并用 Meboom(1987)和 Zhang(1992)的剪力板试验，Paulay(1971)的连梁试验，Leonhardt 和 Walther(1966)的两跨深梁试验得出试验数据修正它。

Vecchio(2000 and 2001a)开发了扰动应力场模型（DSFM），它是处于旋转裂缝和固定裂缝方法之间的模型。DSFM 包括了沿着开裂表面的剪切滑移，这使得该模型比 MCFT 更复杂。用板件和深梁的试验结果对 DSFM 预测的结果进行修正，并跟 MCFT 的分析结果进行比较。在大多数情况下用 DSFM 和 MCFT 预测的结果很接近。

Belletti 等人（2001）通过引用混凝土和钢筋的应力应变关系，骨料咬合及销栓作用，提出了固定裂缝模型。模型中引进 Pang 和 Hsu(1995)提出的表示受压混凝土行为中的拉应变效应的软化系数。。。分析了在东京大学和在美国休斯顿大学进行的板件试验。该模型的预测结果与试验结果很一致。

Kwon 和 Spacone(2002)在三维有限元分析中应用旋转裂缝来预测钢筋混凝土柱的力与位移关系的单调曲线。分析结果与试验结果进行了对比。采用混凝土三维本构模型和单轴钢筋模型。把三维本构模型解耦到三个不同的单轴应力应变关系中。把该模型补充进有限元软件 FEAP 中（Taylor1999）。混凝土用三维 8 节点块单元建模，钢筋当作杆单元建模。在分析中同时采用了切线和割线刚度公式。作者发现切线方法在应力应变曲线的峰值点有数值困难，所以决定在有限元分析中采用割线方法。

以上回顾的模型被用在预测钢筋混凝土板单元的单调行为。从 1980 年起，学者开始开发各种分析模型，预测承受反复循环加载的钢筋混凝土的行为，这也可以被用来预测钢筋混凝土结构的动力性能。

Okamura 和 Maekawa(1991)提出承受反复循环荷载的钢筋混凝土的本构规律。该本构模型主要是针对未开裂和开裂后的混凝土，混凝土和钢筋之间粘结的建模。作者补充材料本构规律到有限元方法中，并开发了名叫“WCOMR”的二维有限元软件。该软件应用于在反复循环荷载作用下的钢筋混凝土剪力墙的非线性分析。分析结果与试验结果达到了很好的一致。

Izumo 的人(1992)提出一种用于钢筋混凝土板件承受单调和反复循环荷载的分析模型。从钢筋和开裂混凝土的本构模型中建立分析模型。开裂混凝土模型中包含了混凝土的拉伸硬化，受压开裂混凝土和沿着开裂表面的剪力传递。该模型用反复循环加载作用下的钢筋混凝土板的试验来修正。

Shin 等人开发出一种计算机程序，预测在反复循环加载作用下的钢筋混凝土剪力墙的行为。此程序包括了用墙元模拟的钢筋混凝土弥散裂缝模型和用节点单元模拟的分离裂缝模型。预测结果用反复循环加载作用下的剪力墙试验结果来修正。

Sittipunt 和 Wood（1995）开发了用于研究结构墙的循环响应的有限元模型。在混凝土材料中采用弥散固定裂缝模型。在滞回模型中考虑混凝土的各种特性，包括受压软化，拉伸硬化和循环荷载作用下混凝土特性的退化。剪应力公式的模型也考虑了骨料咬合，销栓作用及在循环荷载作用下的强度退化的影响。在结构墙的有限元划分网格中，用四节点等参平面应力单元建立混凝土单元模型。钢筋建模成两节点桁架单元。每一个混凝土单元被四个钢筋桁架单元包围。用高宽比为 2.0 的高层剪力墙的试验结果修正分析模型。

Ile 和 Reynouard(2000)提出用于预测钢筋混凝土平面应力结构的循环响应的弥散固定裂

缝模型。用固定裂缝方法把混凝土建模为四节点单元。钢筋建模为两节点桁架杆单元，假设在混凝土和钢筋之间存在完全的粘结。该模型预测结果与在单调和反复循环加载下的剪力墙试验结果进行对比。在单调和循环分析中采用修正 Newton-Raphson 法的求解算法。该模型被用来预测承受地震荷载的剪力墙结构的动力性能。在动力分析过程中的数值积分中采用 Newmark 的常数平均加速度方法。数值分析结果与试验结果显示出很好的一致。

Palermo 和 Vecchio (2003) 提出一种部分弥散旋转裂缝模型，用于模拟承受反复循环剪力作用下的钢筋混凝土单元，这是对单调模型 MCFT 的一种延伸和扩展。提出了混凝土和钢筋的循环应力应变模型。该模型被补充到二维非线性有限元软件中。该软件基于采用总荷载和迭代分析过程而形成的割线刚度公式。钢筋被建模成弥散单元，也可用桁架杆单元离散地表示。该循环模型用在反复循环荷载作用下的高宽比大于 2.0 的细长结构墙和方形墙的试验结果来修正 (Palermo 和 Vecchio 2004a)。

Foster 等人 (2004) 把以往旋转裂缝模型 CMM (Kaufmann 和 Marti 1998; Foster 和 Marti 2003) 扩展为一种固定裂缝模型。这种模型被进一步扩展而考虑了循环作用。该模型被合并到一种有限元软件中，其得出的结果用单调加载作用下的板件试验和在反复循环加载作用下的多层剪力墙结构试验来修正。剪力墙用四节点等参混凝土膜单元建模，钢筋用一维叠加单元建模。对在反复循环加载作用下的剪力墙的预测结果很好符合了试验数据。作者指出预测的结果只对于由钢筋行为控制的剪力墙是有效的，而当剪力墙的破坏是由混凝土的性能控制时，这种相关性将无效。

近年来，一些学者已经研究了对在反复循环加载作用下的钢筋混凝土剪力墙行为的有限元模拟。Palermo 和 Vecchio (2004a) 把扰动应力场模型扩展到循环作用，预测结构墙在反复循环荷载作用下的特性。Shirai 等人 (2004) 对盒状钢筋混凝土剪力墙在由不同角度输入的循环侧向荷载作用下的性能进行有限元模拟。Delapace 等人 (2004) 提出了一种研究钢筋混凝土剪力墙破坏和断裂的层次化方法。Tanabe 等人 (2004) 提出一种分析钢筋混凝土剪力墙的次剪切破坏和研究剪力墙局部破坏的分析模型。

2.1.2 以往休斯顿大学研究小组所做的研究。

在过去 20 年中，休斯顿大学通过使用万能板件试验机进行了大量广泛的关于钢筋混凝土行为的试验和理论研究 (Hsu and Pang 1995a; Hsu 等人 1995b)。万能板件试验机进行足尺钢筋混凝土构件 (1398mmX1398mmX178mm) 在剪应力和正应力作用下的试验。从 1987 年以来，已经进行了超过 100 多块板的试验，建立了四种预测钢筋混凝土膜构件的非线性受剪行为的分析模型。它们分别为旋转角软化桁架模型，RA-STM (Hsu 1993; Belarbi and Hsu 1995; Pang and Hsu 1995)，固定角软化桁架模型，FA-STM (Pang and Hsu 1996; Hsu and Zhang 1997)，软化膜模型，SMM (Hsu and Zhu 2002)，及循环软化膜模型，CSMM (Mansour and Hsu 2005a, 2005b)。这些模型都是合理的，因为它们都满足 Navier 的三个材料力学原理：应力平衡，应变协调和材料本构关系。这四个模型的特征总结如下。

第一个模型为旋转角软化桁架模型 (RA-STM)，这是一种旋转裂缝模型。RA-SAT 相对 CFT 有两个改善的地方：(1) 考虑了混凝土的拉应力，因此能准确预测变形，(2) 在弥散裂缝水平上推导出埋置在混凝土中的钢筋的平均应力应变曲线，因此它可以准确用在平衡和协调方程中，这是建立在材料连续性基础上的。

1996 年，休斯顿大学研究小组 (Pang and Hsu, 1996; Hsu and Zhang 1997) 报告了固定角软化桁架模型 (FA-STM)，它假设裂缝出现的方向与所施加的主拉应力方向垂直。采用受剪混凝土复杂的本构关系来考虑在沿着裂缝方向的混凝土支撑中的剪应力。虽然比 RA-STM 复杂，FA-STM 能够预测混凝土的贡献 (V_c)。Zhu, Hsu 和 Lee (2001) 推导出一种合理的剪切模量并编写出像 RA-STM 一样简单的新求解算法 FA-STM。Wang 等人 (1999) 和 Wang and

Hsu(2001)将 FA-STM 补充到通用有限元软件 FEAP (Taylor1999) 中, 预测钢筋混凝土结构的单调行为。预测结果与梁, 板及框架剪力墙的试验结果符合得很好。

RA-STM 和 FA-STM 都能满足预测受剪钢筋混凝土构件的前峰值行为(上升段)的要求。然而力-变形曲线的后峰值行为(下降段)不能被这两种模型准确预测出来。这是因为在这些模型中忽略了由泊松效应产生的开裂钢筋混凝土的应力应变及泊松比设为 0。为了研究代表两个主应变的相互作用的泊松效应, 做了 12 块板的试验, 来定量泊松效应 (Zhu2000;Zhu and Hsu2002)。发现可以通过两个 Hsu/Zhu 系数来表征泊松效应, 定义为“基于弥散裂缝概念的开裂钢筋混凝土的泊松比。”在后屈服范围内的 Hsu/Zhu 系数 V12 (由垂直压应变产生的拉应变) 被定为常数 1.9, Hsu/Zhu 系数 V21 (由垂直拉应变产生的压应变) 被设为 0。

Hsu 和 Zhu(2002)开发了软化膜模型 (SMM) 来预测钢筋混凝土膜构件的受剪行为。通过加入 Hsu/Zhu 系数, SMM 能预测膜构件的包括后峰值段的整个剪应力应变曲线。跟 FA-STM 相似,SMM 也假设构件中裂缝的方向与所施加的主拉应力方向垂直, 因此得到混凝土贡献 V_c 。通过采用由 Zhu,Hsu 和 Lee (2001) 提出的简化合理的剪切模量, SMM 得到了很大的简化, 代替了受剪混凝土的复杂的经验性的本构关系。SMM 能够预测文献中所有板件试验的单调行为(Pang and Hsu1995;Zhang and Hsu 1998;Vecchio and Collins 1982)。

Mansour 和 Hsu (2005a,2005b) 提出了循环软化膜模型 (CSMM), 来预测包括了卸载和再加载应力应变曲线的钢筋混凝土膜构件的反复循环受剪响应。CSMM 是对 SMM 的一种延伸和扩展, 在膜构件中加入了混凝土和钢筋的循环本构规律 (Mansour, Lee and Hsu2001)。在 CSMM 中, 假设在循环加载作用下的后屈服阶段的 Hsu/Zhu 系数 V12 (由垂直压应变产生的拉应变) 为常数 1.0, 这是基于 Mansour (2001) 报告的板的剪应力应变曲线的相关研究。Hsu/Zhu 系数 V21 (由垂直拉应变造成的压应变) 被设为 0。CSMM 被用来预测配有不同钢筋网格方向和配筋率的钢筋混凝土板的试验循环受剪响应。CSMM 根据在休斯顿大学进行的 15 个钢筋混凝土板试验进行了修正。建立 CSMM 中的本构规律来预测滞回环, 剪切刚度, 剪切延性和在循环剪力作用下的钢筋混凝土板的耗能能力。

近年来, 为了研究混凝土本构关系中法向应力的作用, 在休斯顿大学进行了钢筋混凝土板在剪力和法向应力作用下的试验 (Kumar2004)。SMM 和 CSMM 中的本构规律广泛地考虑了法向应力效应 (Hsu 等 2005)。

另一方面, 用有限元方法进行大量钢筋混凝土结构的动力分析, 来预测钢筋混凝土结构的抗震性能(Mo and Jost 1993a and 1993b;Mo and Chang 1993 and 1995;Mo and Lai 1996;Mo and Hwang 1997;Mo 等 2004)。Mo 和 Jost(1993a)预测了多层剪力墙结构的地震响应, 并研究了钢和混凝土材料强度中的变化效应。Mo 和 Jost(1993b)编写了用于钢筋混凝土框架剪力墙结构动力分析的算法。Mo 和 Chang (1993 和 1995) 分析了首层柱底装有聚四氟乙烯滑块的多层剪力墙的地震响应特征。Mo 和 Lai (1996) 用计算机分析程序研究了钢筋混凝土结构碰撞中的变形效应。Mo 和 Hwang (1997) 为研究周边钢筋混凝土建筑地震响应中深基坑的影响, 对其进行了有限元分析。Mo 等人 (2004) 用有限元分析研究了有火灾损伤的钢筋混凝土建筑的地震响应。调查了火灾位置和持续时间, 地面加速度及结构中的轴力的影响。

2.1.3 文献中三个课题的讨论

2.1.3.1 弥散裂缝模型对离散模型

根据钢筋混凝土有限元模型的报告 (ASCE1982;ASCE/ACI1993), 混凝土的受拉开裂是钢筋混凝土中的非线性最重要的来源之一。裂缝可以通过两种方式建模: 离散裂缝和弥散裂缝。离散裂缝模型中, 裂缝被离散地建模成一种几何上的非连续性, 这经常隐含着用有限元拓扑结构的连续变化来反映裂缝的开展。离散模型也是基于素混凝土和钢筋的应力应变关

系，它们的相互作用通过沿着钢筋的粘结滑移和沿着裂缝表面的剪切滑移来体现。这样，离散建模就显得很费力，最适用于由很少裂缝控制的破裂情况下的材料建模。这种模型不适用于整个结构的主体部分，比如剪力墙，这是因为在建立粘结滑移和剪切滑动的模型是很困难。Shipment 和 Gerstle(1979)的研究表明，剪力墙在循环加载作用下的变形并不随着粘结处的变形增大而显著增大，而主要是由混凝土强度和刚度的降低引起的。Choi 等(1991)和 Stevens 等(1991a and 1991b)进一步表明钢筋混凝土中混凝土与钢筋之间的粘结滑移量不是承载力降低的主要因素，除非破坏是由于粘结引起的。

RA-STM,FA-STM,SMM 和 CSMM 都是弥散裂缝模型，把钢筋混凝土的裂缝当作一种连续的材料。这样，力的平衡方程和变形的协调方程是基于很好地建立起连续介质力学原理。为了联系平衡和协调方程中应力应变，混凝土和钢筋的本构关系必须基于弥散应力和弥散应变。休斯顿大学在过去 15 年里已经建立起在单调和循环加载作用下混凝土和轻型钢筋的弥散应力与弥散应变的关系曲线 (Belarbi and Hsu 1994 and 1995;Mansour 等 2001)。

这些弥散裂缝模型是很先进的，因为它们决定了开裂钢筋混凝土构件的整体刚度和强度特性而没有直接处理裂缝宽度、裂缝长度和粘结滑移接触面的变化。弥散裂缝模型在由足尺试验中直接得到的植筋弥散应力应变曲线公式中间接考虑这些变化。跟大多数模型将混凝土开裂后的混凝土泊松比设为 0 相比，SMM 和 CSMM 采用 Hsu/Zhu 系数考虑开裂钢筋混凝土的泊松效应。基于试验结果，在单调荷载作用下 Hsu/Zhu 系数 V_{12} (表示 2 方向的压应变对 1 方向的拉应变的影响) 在钢筋屈服后设为常数值 1.9 (Zhu and Hsu2002)。因为 SMM 和 CSMM 把开裂钢筋混凝土当作一种连续材料，Hsu/Zhu 系数对于弥散混凝土和弥散钢筋都是一样的。

2.1.3.2 旋转裂缝 VS 固定裂缝

固定裂缝在处理混凝土裂缝时被首先提出 (ASCE1982)。在这些模型中，正交裂缝由超过开裂应力的第一主应力控制。虽然接下来主拉应力能以与原始两个固定正交方向成一定角度建立，但是一旦裂缝开始出现，正交方向就假设被固定了。采用固定裂缝方法的分析结果通常是高估了响应和极限承载力 (Crisfield and Wills 1989;Kollegger 1991)。

旋转裂缝模型，例如 CFT 和 RA-STM，是在假设裂缝方向与混凝土主压应力方向 (与开裂构件的主压应变方向一样) 倾斜成一定角度基础上提出来的。这个角度称为旋转角，因为混凝土主应力的坐标随着比例荷载的增加而旋转。由于裂缝方向假设常常沿着混凝土主应力方向，采用旋转裂缝方法不能预测试验中观察到的混凝土贡献。

与固定裂缝模型相似，钢筋混凝土模型 FA-STM,SMM 和 CSMM 假设裂缝出现在钢筋混凝土构件上所施加主压应力的方向上，而不是出现在混凝土的主压应力方向上。只有当构件承受不断增加的比例荷载时，所施加的主应力方向保持不变。因为混凝土的主应力方向不同于构件上所施加的主应力方向，混凝土剪应力能从这偏离角度中计算出来而得到混凝土贡献 V_c 。因为开裂钢筋混凝土被当作连续材料，剪切模量 (Zhu,Hsu and Lee 2001) 不是一种独立的材料性质，而是由主应力方向上钢筋混凝土的应力应变决定。在 Zhu 等的剪切模量中，构件主应变的偏离角度被假定与混凝土主应力的偏离角度一致。

2.1.3.3 应用于非线性有限元分析中的技术

在建立钢筋混凝土模型后，它们可以被补充进有限元软件中，来预测钢筋混凝土组件或整个结构的行为。非线性有限元技术和计算设备的不断改善使得模拟钢筋混凝土结构更加可行。

由于混凝土和钢筋的材非线性行为，钢筋混凝土结构的有限元分析是一个高非线性的问题。对于非线性有限元问题，经常采用增量过程。结构的切线刚度矩阵把荷载增量和位移增量联系起来。它加入了联系应力增量和应变增量的切线材料本构矩阵。因为增量过程将导致误差的积累，必须提出一种采用有效求解算法的迭代过程来将积累的误差最小化。因此，

增量方法和迭代过程的组合作为大多数的非线性有限元分析的基础。在求解非线性方程时，最著名的求解算法时 **Newton-Raphson** 方法。就如在文献回顾中关于本构模型有限元的应用看到的那样，钢筋混凝土结构非线性有限元分析中的求解技术随着钢筋混凝土本构模型的改进而不断进步。

割线刚度公式在预测单调加载结构响应时被认为时稳定而简单的。然而，在循环和动力荷载作用下，采用割线刚度公式的求解过程将变得很复杂。切线刚度公式对于不同种类的荷载更为通用，大多数有限元软件的迭代过程都是基于切线刚度公式开发出来的。在上升段，首先应用力控制进行单调分析。然而，在荷载控制下，用 **Newton-Raphson** 迭代方法不可能去判断什么时候到了极限荷载。建议用位移控制和弧长控制方法替代荷载控制 (**Ayoub and Filippou 1998**)，这样就能够绕开裂缝阶段和最大强度而得到整条荷载-变形曲线。在过去 20 年中，一些先进的求解过程例如“线性-研究”法，用加速度的 **quasi-Newton** 法，弧长法，自动增量法，以及为非线性分析提出的再-开始法 (**Crisfield 1997**)。采用这些先进技术能大大改进钢筋混凝土结构的有限元分析。

然而，钢筋混凝土结构的有限元分析仍然是一个巨大的课题。大多数非线性有限元软件将包含相似的过程，包括建立有限元模型，例如节点，单元，材料和荷载；采用迭代算法求解非线性方程；以及记录分析结果。如果研究人员独立去开发他们自己的有限元软件，这将是一个异常费力的工作。而且，研究人员花这么多时间和精力去开发通用有限元代码是很不经济的。越来越多的研究人员想去用通用的有限元软件或是框架例如 **FEAP**，**ABAQUS**，或是 **OpenSees**，这些可以让使用者补充进自己的单元和本构规律。传统的通用有限元软件是用面向功能的 **FORTRAN** 语言编写的。与面向功能语言相比，面向对象语言例如 **C++** 和 **Java** 已经显著地改进了软件的扩展性和适用性。近年来，面向对象的程序被应用在有限元分析中，以及一些有限元软件和框架中，例如已开发出的 **OpenSees**(**Fenves 2001**)。

OpenSees 是 **Open System for Earthquake Engineering Simulation** 的缩写，由加州大学伯克利分校的太平洋地震工程中心 (**PEER**) 开发。**OpenSees** 是一种面向对象的框架，采用有限元法应用于地震工程模拟。**OpenSees** 一个很关键的特点是组件的可交换性以及可以将已存在的库和新的组件集成到框架中而不必改变已有的代码 (**Fenves 2001**)，这使得添加新的单元，材料和其他组件变得很方便。同时，**OpenSees** 已经加入了许多学者在进行钢筋混凝土结构非线性分析时建议的先进技术。荷载控制，位移控制和弧长法在 **OpenSees** 静力分析中都可以适用。**Newmark** 法、**Wilson- θ** 法和其他方法对于动力分析都适用。不同的非线性分析求解算法比如 **New-Raphson** 法，修正的 **Newton** 法及加速度搜索 **Quasi-Newton** 法在 **OpenSees** 中都适用。而且，**OpenSees** 是一种资源开放的软件，这意味着它具有一种通信机制来交换数据和累积每一个人的研究成果。因此，它有成为一种地震工程的共同体代码的潜力。

可以从文献回顾和相关的讨论中得到两点结论：(1) 在弥散裂缝模型中，**CSMM** 提高了最适当的本构关系，来预测钢筋混凝土构件在循环荷载作用下的行为；(2) 进行非线性有限元分析时，**OpenSees**(面向对象有限元框架)对于地震工程研究共同体是最合适的框架。

关于 **CSMM** 和 **OpenSees** 框架的具体细节将分别在 2.2 节和 2.3 节中表述。

2.2 循环软化膜模型 (**CSMM**)

2.2.1 平衡和协调方程

本模型考虑的和图 2.1 所示的面内单元由两层以与主应力方向成一给定角度正交钢筋网进行加强。在公式中用到两个笛卡尔参考坐标系。第一个笛卡尔参考坐标系 **L-T** 坐标系统代表纵向和横向钢筋方向。第二个参考坐标系 **1-2** 坐标系统代表主应力方向。为了计算的目的，假设钢筋均匀分布在 **L** 和 **T** 方向，膜单元等厚度。作用在单元四个边界上的主应力假设是均匀分布的。

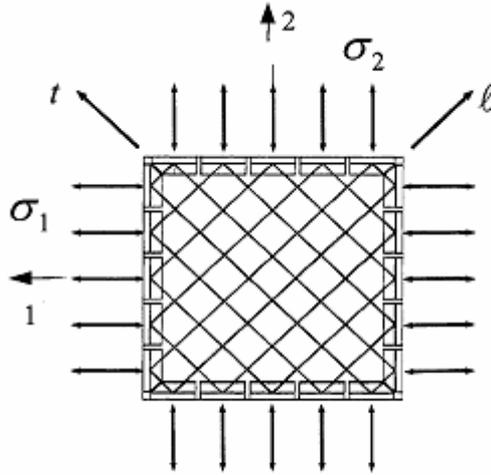


Fig. 2.1 A typical reinforced concrete plane stress element.

膜单元中联系所施加的应力 (σ_t, σ_l and τ_{tl}) 与钢筋 (f_t and f_l) 和混凝土 (σ_1^c, σ_2^c and τ_{12}^c) 的内应力的三个平衡方程表述为: (Pang and Hsu 1996)

$$\sigma_t = \sigma_2^c \cos^2 \alpha_2 + \sigma_1^c \sin^2 \alpha_2 + \tau_{12}^c 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_t f_t, \quad (2.1)$$

$$\sigma_l = \sigma_2^c \sin^2 \alpha_2 + \sigma_1^c \cos^2 \alpha_2 - \tau_{12}^c 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \rho_l f_l, \quad (2.2)$$

$$\tau_{tl} = (\sigma_2^c - \sigma_1^c) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \tau_{12}^c (\sin^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_2). \quad (2.3)$$

定义在钢筋 L-T 坐标系中的钢筋应变和主应力 1-2 坐标系中的混凝土应变的三个协调方程表述如下:

$$\varepsilon_t = \varepsilon_2 \cos^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \sin^2 \alpha_2 + \frac{\gamma_{12}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon_2 \sin^2 \alpha_2 + \varepsilon_1 \cos^2 \alpha_2 - \frac{\gamma_{12}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2, \quad (2.5)$$

$$\frac{\gamma_{tl}}{2} = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \sin \alpha_2 \cos \alpha_2 + \frac{\gamma_{12}}{2} (\sin^2 \alpha_2 - \cos^2 \alpha_2). \quad (2.6)$$

在 CSMM 中, 方程 (2.4) 到 (2.6) 中的应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_t$ and ε_l 都是双轴应变, 考虑了开裂混凝土的 Hsu/Zhu 系数 (Zhu and Hsu 2002)。

2.2.2 双轴应变 VS 单轴应变

为了求解方程 (2.1) 到 (2.6) 中的六个平衡和协调方程, 混凝土和钢筋的应力应变关系必须基于双轴应变 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_t$ and ε_l 。因为一般的实验室试验只能提供混凝土和钢筋的单轴本构关系 (而不是双轴本构关系), 因此在使用单轴本构关系前, 方程 (2.4) 到 (2.6) 中的双轴应变必须转化为单轴应变。这样, 采用 Hsu/Zhu 系数 (V12, V21) 推导出了联系双轴应变 ($\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_t$ and ε_l) 和单轴应变 ($\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_t$ and $\bar{\varepsilon}_l$) 的一组四个方程如下:

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2, \quad (2.7)$$

$$\bar{\varepsilon}_2 = \frac{\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_1 + \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \varepsilon_2, \quad (2.8)$$

$$\bar{\varepsilon}_t = \bar{\varepsilon}_2 \cos^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \sin^2 \alpha_2 + \frac{\gamma_{12}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2, \quad (2.9)$$

$$\bar{\varepsilon}_s = \bar{\varepsilon}_2 \sin^2 \alpha_2 + \bar{\varepsilon}_1 \cos^2 \alpha_2 - \frac{\gamma_{12}}{2} 2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2. \quad (2.10)$$

一旦单轴应变 $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_t$ and $\bar{\varepsilon}_s$ 定下来了, 就可以通过循环荷载下的单轴本构关系求解

出方程 (2.1) 到 (2.3) 中的应力 $\sigma_1^c, \sigma_2^c, \tau_{12}^c, f_t$ and f_s 。

如前面所提过的, 通过考虑 Hsu/Zhu 系数, 开发了 SMM 来预测钢筋混凝土膜单元在单调剪应力作用下的整体行为。Zhu 和 Hsu(2002)具体地阐述了在单调剪应力作用下板件的两个 Hsu/Zhu 系数。发现第一个系数 V12 (表示 2 方向的压应变对 1 方向的拉应变的影响) 随着钢筋应变的增加而增加, 在屈服后变成常数 1.9。发现第二个系数 V21 (表示 1 方向的拉应变对 2 方向的压应变的影响) 在加载过程中基本上为 0。

然而, 在循环荷载作用下, 裂缝闭合和开启的反复循环使得 Hsu/Zhu 系数 V12 减少。在 CSMM 中, 假设 Hsu/Zhu 系数 V12 在循环荷载作用下变为 1.0, 这是基于 Mansour (2001) 的报告中关于板的剪应力应变曲线的对比研究。Hsu/Zhu 系数 V21 在循环荷载作用下设为 0, 与单调加载情况一样。

2.2.3 材料的本构模型

2.2.3.1 混凝土循环单轴本构关系

受压和受拉开裂混凝土的循环单轴本构关系总结在图 2.2 中。Mansour, Lee 和 Hsu(2001)已经报告了这些本构关系的发展。这些以往提出的混凝土循环本构关系有下面两种特征。第一, 由 Belarbi and Hsu(1994;1995)和 Hsu and Zhang(1996)开发的混凝土循环应力应变曲线的包络曲线和混凝土的单调应力应变曲线很相似。第二, 开发了混凝土卸载和再加载阶段的新的本构关系, 其中考虑了裂缝的开启和闭合。

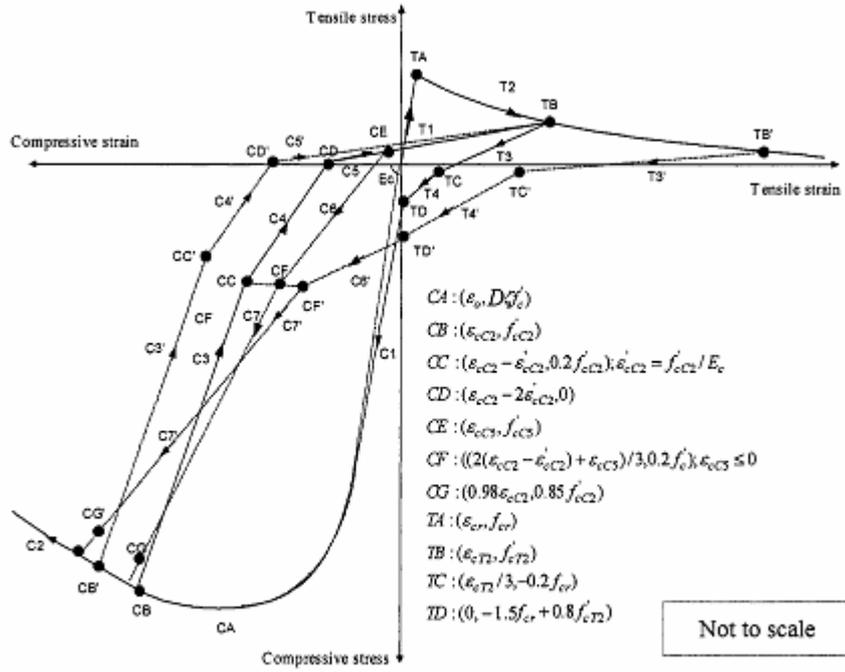


Fig. 2.2 Cyclic smeared stress-strain curve of concrete

$$\text{(Stage C1)} \quad \sigma^c = D\zeta f'_c \left[2 \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\zeta \varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\zeta \varepsilon_o} \right)^2 \right], \quad 0 \leq |\bar{\varepsilon}| \leq |\zeta \varepsilon_o|, \quad (2.11)$$

$$\text{(Stage C2)} \quad \sigma^c = D\zeta f'_c \left[1 - \left(\frac{|\bar{\varepsilon}| / \varepsilon_o - 1}{4/\zeta - 1} \right)^2 \right], \quad |\bar{\varepsilon}| > |\zeta \varepsilon_o|, \quad (2.12)$$

where

$$\zeta = \frac{5.8}{\sqrt{f'_c (\text{MPa})}} \frac{1}{\sqrt{1 + 400 \bar{\varepsilon}'_t / \eta}} \leq 0.9, \quad (2.13)$$

$$D = 1 - 0.4 \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_o} \leq 1.0, \quad (2.14)$$

$$\eta = \frac{\rho_t f_{ty} - \sigma_t}{\rho_t f_{ty} - \sigma_t} \leq 1.0, \quad (2.15)$$

$$\text{(Stage T1)} \quad \sigma^c = E_c \bar{\varepsilon}, \quad \text{if } 0 \leq \bar{\varepsilon} < \varepsilon_{cr}, \quad (2.16)$$

$$\text{(Stage T2)} \quad \sigma^c = f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\bar{\varepsilon}} \right)^{0.4}, \quad \text{if } \bar{\varepsilon} > \varepsilon_{cr}, \quad (2.17)$$

$$\text{(Unloading and Reloading Stages)} \quad \sigma^c = \sigma_i^c + E_{cc} (\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}), \quad (2.18)$$

$$\text{where } E_{cc} = \frac{\sigma_i^c - \sigma_{i+1}^c}{\bar{\varepsilon}_i - \bar{\varepsilon}_{i+1}}, \quad (2.19)$$

2.2.3.2 受剪混凝土的本构关系

Zhu, Hsu 和 Lee (2001) 给出了联系 1-2 坐标系统中的混凝土剪应力 (τ_{12}^c) 和剪应变 (γ_{12}) 的合理方程:

$$\tau_{12}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{2(\epsilon_1 - \epsilon_2)} \gamma_{12}, \quad (2.20)$$

其中 σ_1^c 和 σ_2^c 分别是主应力 1 方向和 2 方向的弥散混凝土应力, ϵ_1 ϵ_2 分别是主应力 1 方向和 2 方向的双轴弥散应变。

2.2.3.3 低碳植筋的循环单轴本构关系

植入混凝土中的钢筋和承受单轴应变的钢筋的循环本构关系已经由 Mansour, Lee 和 Hsu(2001)提出。植筋在循环加载和单调加载下的弥散应力应变曲线(实曲线)总结在图 2.3 中。为了比较,图 2.3 也包括了裸露钢筋的单调应力应变关系(虚线)。可以看到植筋的循环应力应变曲线有下面两个特征。第一,植筋循环应力应变曲线的拉力包络曲线与植筋的单调应力应变曲线很类似。第二,新的植筋卸载和再加载应力应变曲线考虑了包辛格效应。

当植入混凝土中的钢筋在裂缝处开始屈服时,裂缝之间的植筋应力比裂缝出的屈服应力更小,因为部分拉力由混凝土承担。使用弥散裂缝概念,钢筋的应力沿着横穿几条裂缝的钢筋平均。开始屈服时的弥散钢筋应力将明显小于裂缝处裸露钢筋的局部屈服应力。如图

2.3 所示,第 2T 阶段,在开始屈服时的钢筋弥散应力 f_n 低于裸露钢筋的屈服应力 f_y 。

Hsu(1993)和 Belarbi 和 Hsu(1994;1995)表明 f_n and f_y 之间的差别取决于参数 B, 其中 $B = (1/\rho)(f_{cr}/f_y)^{1.5}$ 。参数 B 从一个含有三个变量 ρ , f_{cr} , and f_y 的函数中推导出来,它跟变量裂缝宽度、裂缝长度和粘结滑移的接触面等有关。比如,钢筋密度 ρ 的降低将导致低碳钢筋弥散屈服应力 f_n 的降低,同时将导致裂缝宽度和裂缝长度的直观增加。Hsu 和 Zhu (2002) 报告参数 B 在 ρ 从 0.25%到 5.24%的实际范围内及 f_c' 超过 100Mpa 时是有效的。

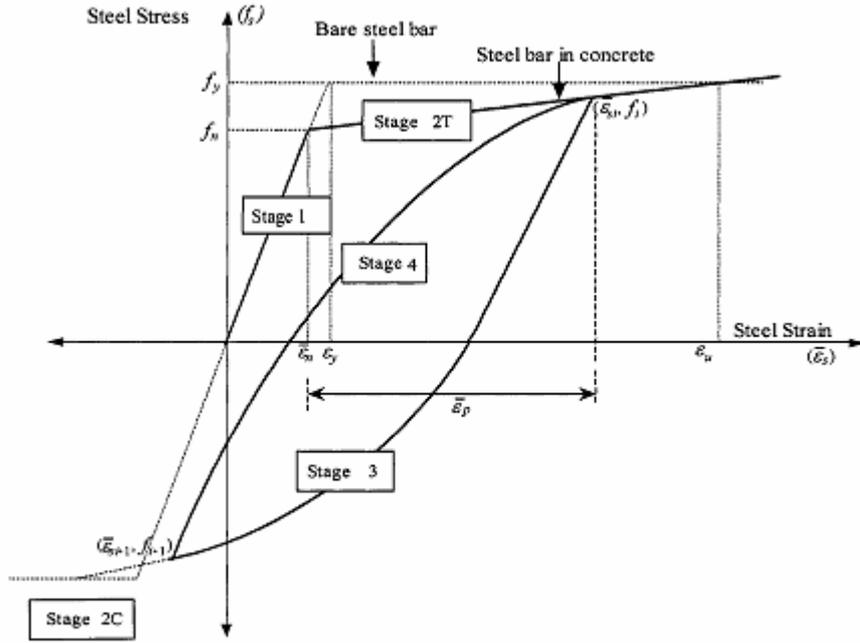


Fig. 2.3 Cyclic smeared stress-strain curve of embedded mild steel bars

$$\text{(Stage 1)} \quad f_s = E_s \bar{\varepsilon}_s, \quad (\bar{\varepsilon}_s \leq \bar{\varepsilon}_n), \quad (2.21)$$

$$\text{(Stage 2T)} \quad f_s = f_y \left[(0.91 - 2B) + \left(0.02 + 0.25B \frac{\bar{\varepsilon}_s}{\varepsilon_y} \right) \right], \quad (\bar{\varepsilon}_s > \bar{\varepsilon}_n), \quad (2.22)$$

$$\text{where } B = \frac{1}{\rho} \left(\frac{f_{cr}}{f_y} \right)^{1.5} \text{ and } \rho \geq 0.5\%, \quad (2.23)$$

$$\bar{\varepsilon}_n = \varepsilon_y (0.93 - 2B), \quad (2.24)$$

$$\text{(Stage 2C)} \quad f_s = -f_y, \quad (2.25)$$

$$\text{(Stage 3 and Stage 4)} \quad \bar{\varepsilon}_s - \bar{\varepsilon}_u = \frac{f_s - f_l}{E_s} \left[1 + A^{-R} \left| \frac{f_s - f_l}{f_y} \right|^{R-1} \right], \quad (2.26)$$

$$\text{where } A = 1.9k_p^{-0.1}, \quad (2.27)$$

$$R = 10k_p^{-0.2}, \quad (2.28)$$

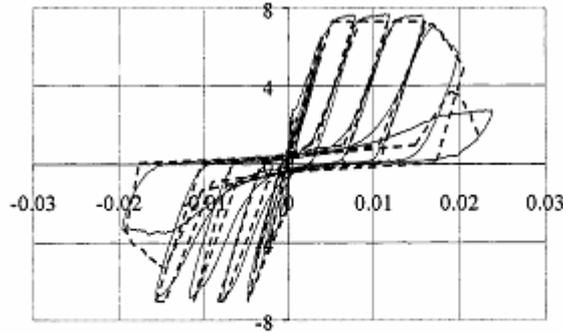
$$k_p = \frac{\bar{\varepsilon}_p}{\bar{\varepsilon}_n}. \quad (2.29)$$

2.2.4 试验修正

CSMM 被用于预测有不同钢筋网格方向和配筋率的钢筋混凝土膜单元的试验循环剪切响应 (Mansour2001; Mansour and Hsu 2005a, 2005b)。此外, CSMM 被用来解释剪应力应变

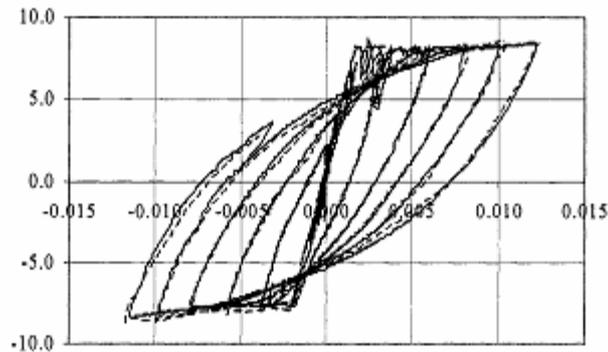
曲线滞回环中是否存在箍缩机理 (Mansour 2001; Mansour and Hsu 2005a, 2005b)。

图 2.4 表示 CSMM 预测钢筋混凝土板在循环剪力作用下的响应的有效性。该图对比了两块板用 CSMM 预测和试验做出来的滞回剪应力应变曲线。可以看到 CSMM 确实可以用来成功预测有不同钢筋角度的钢筋混凝土板中有无箍缩效应以及高精度的峰值前和峰值后行为。



(a) CA3 ($\alpha_2 = 45^\circ$; $\rho_t = \rho_s = 1.7\%$)

Fig. 2.4 Predicted vs. experimental shear stress-strain curves of two typical panels as reported by Mansour and Hsu (2005b).



(b) CE3 ($\alpha_2 = 90^\circ$; $\rho_t = \rho_s = 1.2\%$)

Fig. 2.4 Predicted vs. experimental shear stress-strain curves of two typical panels as reported by Mansour and Hsu (2005b) (Continued).

2.3 有限元框架 OpenSees

OpenSees (Fenves 2001) 是一种采用有限元法的面向对象的软件框架，用于地震工程中的模拟应用。它由一组有限元建模的模块，分析过程的规范，分析过程中被监控数量的选择，以及结果输出组成。OpenSees 网站上关于 OpenSees 特点的描述简述如下：

在 OpenSees 框架下，每一个有限元分析包括四个主要类型的对象：模型创建工具对象，域对象，分析对象和记录对象如图 2.5 所示：

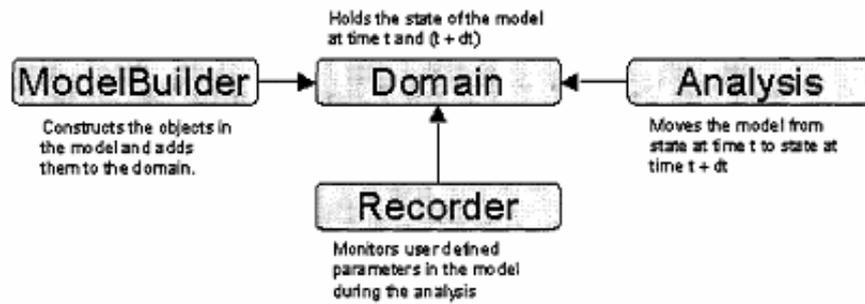


Fig. 2.5 Principal objects in OpenSees (Fenves 2001)

模型创建工具对象构建节点和节点质量，生成单元和单元的材料，定义作用在节点和单元上的荷载，以及定义施加在节点上的约束。模型创建工具负责在模型中创建对象，例如节点，质量，材料，单元，荷载模式，约束等等，并把它们加到域当中。

用模型创建工具生成对象后，它们被存储到域对象中。域对象也提供了从分析和记录对象到域中对象的通道，并在分析过程中保持模型的状态。

分析对象负责对模型进行静力或动力分析。分析对象包括约束处理器，计算器，分析模型，求解算法，积分器和方程系统。这些对象定义了分析如何进行。约束处理器对象定义了节点自由度之间的关系，并形成分析中约束方程。计算器用来创建自由度数目对象，这在方程数目和自由度之间形成了映射关系。分析模型对象包括一些有限元对象和自由度组对象。求解算法对象定义了用于求解非线性方程的的求解算法。目前，Opensees 求解算法对象包括了一些方法例如线性，Newton-Raphson，修正 Newton-Raphson，带有线性搜索的 New-Raphson,带有加速度搜索的 New-Raphson 和其他算法。积分器对象决定了分析中每个 $t+dt$ 时间内的预测步和校正步，并指定了任一迭代时的切线矩阵和残余向量。积分器的类型对于静力和动力分析是不一样的。静力分析的积分器对象包括荷载控制，位移控制和弧长控制。动力分析的积分器对象包括 Newmark 法，Wilson- θ 法，Hillbert-Hughes-Taylor 法和其他方法。方程系统对象用来存储和求解分析中的方程系统。

记录对象用来监控分析过程中域组件的状态，并把状态写进文件或是数据库中。

在这个框架下，如要引进一种新的单元类型或是新的材料，可以将新的相关的对象类型根据框架指定的规范加到 Opensees 中而不用改变已存在的代码。这是因为把定义在核心组件（抽象类型）中的接口最小化，使得加入新的组件类型更加容易并足够大，确保可以适应所有要求的東西。

Opensees 不能够进行钢筋混凝土膜结构的非线性有限元分析，比如板和剪力墙，这是因为钢筋混凝土中没有膜模型。而且，Opensees 中混凝土和钢筋的单轴材料模型太简单了，需要建立更成熟的模型。比如，Opensees 中的混凝土模型混凝土 01 没有考虑受拉混凝土的应力和由于垂直方向的双轴拉应变产生受压混凝土的软化效应。钢筋模型钢筋 01 没有考虑在卸载和再加载路线的包辛格效应。因此，钢筋混凝土平面应力材料的新的有限元模型可以被补充进 Opensees 中，来分析钢筋混凝土膜结构。

2.3 结论

在本章中，文献回顾了以往关于钢筋混凝土基于模型模拟的开发和有限元分析模型在钢筋混凝土结构中的应用的研究。回顾强调了在休斯顿大学进行的研究。讨论了关于钢筋混凝土基于模型模拟和非线性有限元分析的问题。特别提出的是循环软化膜模型（CSMM）

(Mansour and Hsu 2005a and 2005b) 和有限元框架 Opensees (Fenves 2001)。基于本章中描述的回顾，得到了三个主要的结论：

1. 循环软化膜模型 (CSMM) 是一种合理和适当的模型，能够预测钢筋混凝土平面应力单元的循环剪切行为。
2. Opensees 是一种用于非线性有限元分析的面向对象框架软件，能被适当地应用在钢筋混凝土平面应力结构的静力、循环和动力特性。
3. CSMM 能被补充进 Opensees 来预测钢筋混凝土平面应力结构的非线性有限元分析。

(本章 Trans by 罗凡)

第三章

RC 平面应力结构有限元分析

3.1 介绍

本章一开始介绍了周期软化膜模型 (CSMM) (Mansour and Hsu 2005a and 2005b) 的有限元列式, 包括基于 CSMM 的钢筋和混凝土单轴材料单元。CSMM 中使用的坐标系统、平衡和协调方程通过有限元列式描述, 并得出基于 CSMM 的钢筋混凝土材料本构矩阵。描述了材料本构矩阵的割线和切线列式, 以及钢筋混凝土平面应力单元有限元分析的迭代解法。对于静力和动力分析, 本文均采用了不同的积分方式。介绍了两总静力分析的积分方法, 分别为荷载控制和位移控制, 并讨论了各自的优缺点; 也介绍了动力分析的两种积分方法, 即 Newmark 法和 Wilson- θ 法以及其分析过程。

最后, 通过在 OpenSees (Fenves2001) 有限元系统中加入 CSMM, 开发了非线性钢筋混凝土有限元程序 SRCS, 并给出了程序的详细内容。

3.2 单轴材料模型

本文中, 根据 CSMM 中混凝土和钢筋的单轴本构关系创建了两个混凝土单轴模型 ConcreteZ01 和 ConcreteZ02, 以及钢模型 SteelZ01。作为比较, 介绍了 OpenSees (Fenves2001) 中现有的两个单轴材料模型——Steel01 和 Concrete01。表 3.1 列出了 5 个模型并在接下来 5 节分别描述。

Table 3.1 Employed uniaxial material models

Section	Model Name	Material Type	Source
3.2.1	Steel01	Steel	Existing in OpenSees
3.2.2	Concrete01	Concrete	Existing in OpenSees
3.2.3	SteelZ01	Steel	Developed based on CSMM
3.2.4	ConcreteZ01	Concrete	Developed based on CSMM
3.2.5	ConcreteZ02	Concrete	Developed based on CSMM

3.2.1 Steel01

图 3.1 为基于单轴双线性材料模型的钢模型 Steel01., 屈服之前为弹性部分, 屈服后为应变强化部分。卸载和重新加载路径遵循双线性模式, 其路径斜率屈服前与弹性模量相同, 屈服后与硬化模量相同。定义钢模型 Steel01 需要钢筋屈服前后的屈服应力和杨氏模量。

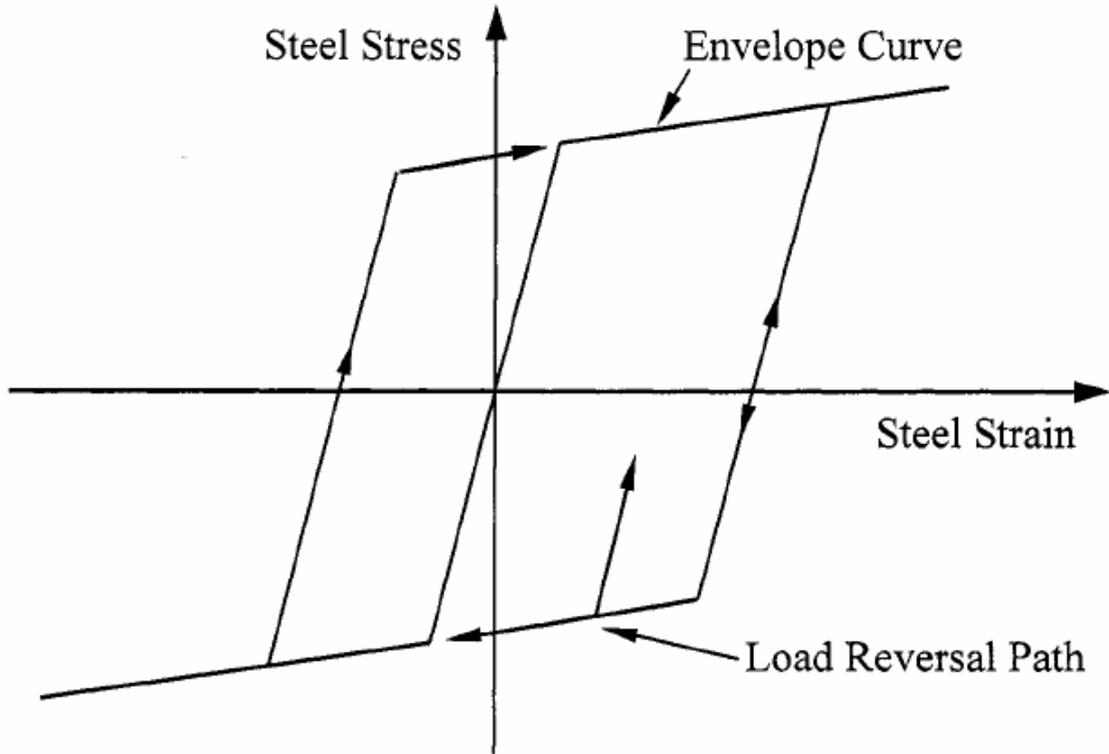


Fig. 3.1 Steel01 material model

3.2.2 Concrete01

混凝土模型 Concrete-1 包含修正的 Kent and Park 材料模型 (Kent and Park 1982), 其退化的线性卸载和重新加载路径依据 Karsan and Jirsa (1969) 的成果。Concrete01 未考虑拉应力。图 3.2 显示了修正的 Kent and Park 模型, 表达式总结如下:

$$\text{For } \varepsilon < 0.002K, f_c = Kf'_c \left[\frac{2\varepsilon}{0.002K} - \left(\frac{\varepsilon}{0.002K} \right)^2 \right], \quad (3.1)$$

$$\text{For } \varepsilon > 0.002K, f_c = Kf'_c [1 - Z(\varepsilon - 0.002K)] \geq 0.2Kf'_c, \quad (3.2)$$

$$\text{where } K = 1 + \frac{\rho_s f_{yh}}{f'_c}, \quad (3.3)$$

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3 + 0.29f'_c}{145f'_c - 1000} + \frac{3}{4}\rho_s \sqrt{\frac{b''}{S} - 0.002K}}, \quad (3.4)$$

f_c = 混凝土纵向压应力 (MPa)

f'_c = 混凝土圆柱体抗压强度 (MPa)

ε = 混凝土纵向压应变

ρ_s = 核心区混凝土体积配箍率

b'' = 外围箍筋包围的核心区混凝土宽度

f_{yh} = 箍筋的屈服强度 (MPa)

S = 箍筋间距

图 3.3 描述了 Concrete01 的卸载和重新加载路径:

- 1) 从包络线上某点开始卸载的路径为连接卸载时的应变 ε_r 和应力为 0 的点 (应变 = ε_p)。

Karsan and Jirsa (1969) 给出了直线的表达式如式 3.5 和 3.6:

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 0.145 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right)^2 + 0.13 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right) \quad \text{for} \quad \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right) < 2, \quad (3.5)$$

$$\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_0} = 0.707 \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} - 2 \right)^2 + 0.834 \quad \text{for} \quad \left(\frac{\varepsilon_r}{\varepsilon_0} \right) \geq 2. \quad (3.6)$$

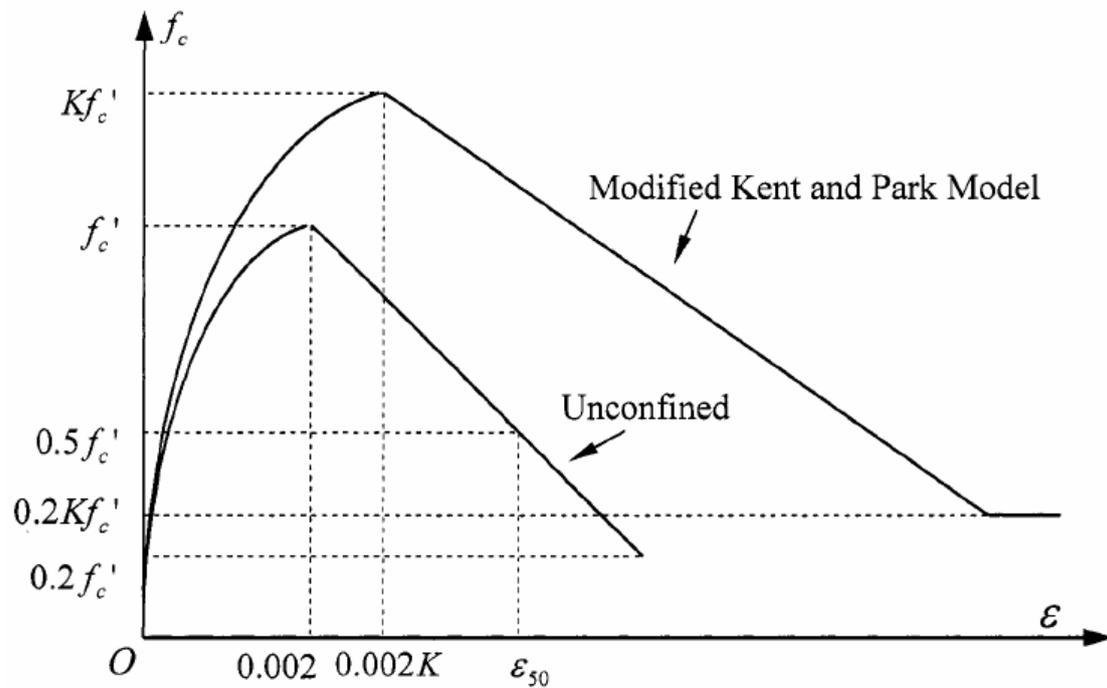


Fig. 3.2 Modified Kent and Park model for monotonic stress-strain relationship of confined concrete

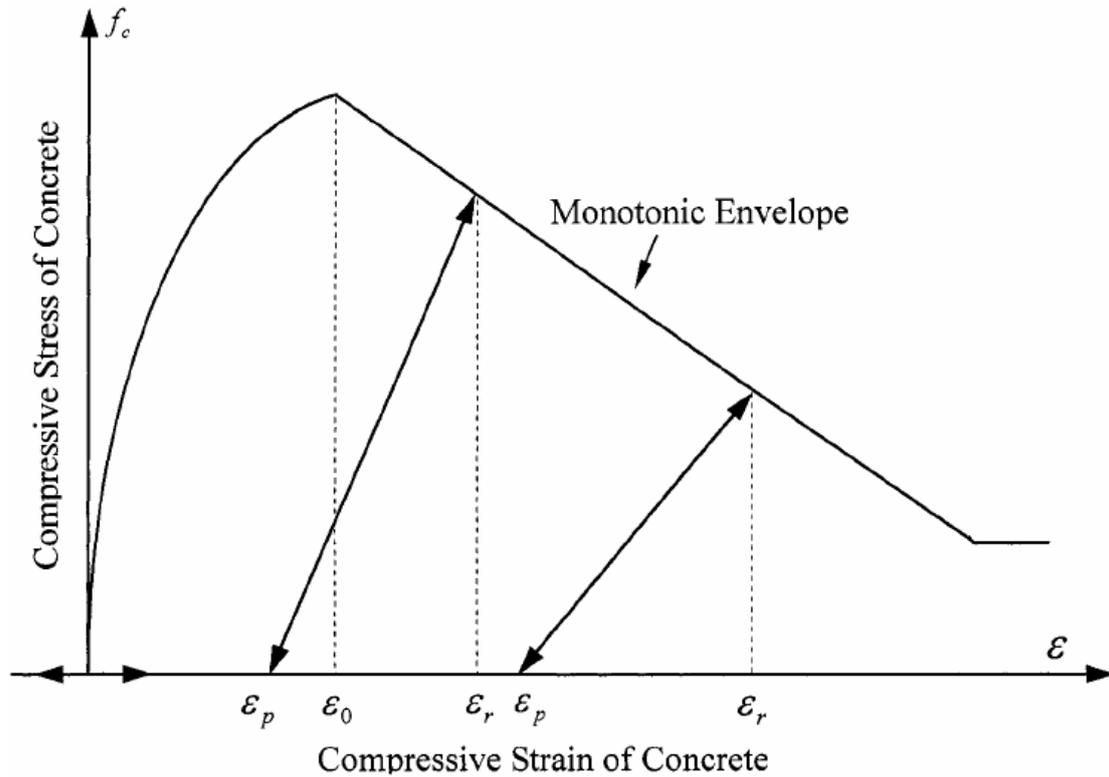


Fig. 3.3 Unloading and reloading paths of stress-strain relationship of concrete in Concrete01

- 2) 混凝土应力为 0 时的应变小于完全卸载的应变 (应变 = ϵ_p)。重新加载时, 只要应变小于 ϵ_p , 应力均为 0。应变大于 ϵ_p 时, 重新加载路径与卸载路径的直线重合。

3.2.3 SteelZ01

钢模型 SteelZ01 包括包络线和 CSMM 中软钢单轴本构模型卸载/重新加载模式。包络线的公式为式(2.21)至(2.25)。式(2.26)至(2.29)描述了非线性卸载和重新加载路径。由于式(2.26)中应变由应力的形式给出, 需要进行迭代求出给定应变下的应力。为避免迭代, Jeng (2002) 提出了使用线段代替非线性曲线的多线性简化模型。

图 3.4 中, 虚线表示 CSMM 定义的卸载和重新加载路径, 实线表示 steelz01 采用的线性简化。

图 3.4 中两个折点—— (ϵ_{m1}, f_{m1}) 和 (ϵ_{m2}, f_{m2}) , 分别为 $f_{m1} = \pm 0.65 f_y$ 和 $f_{m2} = 0$, $\epsilon_{m1}, \epsilon_{m2}$

通过把 f_{m1}, f_{m2} 带入式(2.26)的 f_s 计算得出。一旦折点确定, 直线段上的应力值即为折点间

应变和应力的线性函数, 并易求出给定应变下的应力。从而避免了原始曲线的迭代过程。为计算式 2.27 和 2.28 中的 A 和 R, 设定其默认值为 1.9 和 10。用户可以自定义其值。

图 3.5 显示了使用 SteelZ01 的应力应变滞回环的例子。

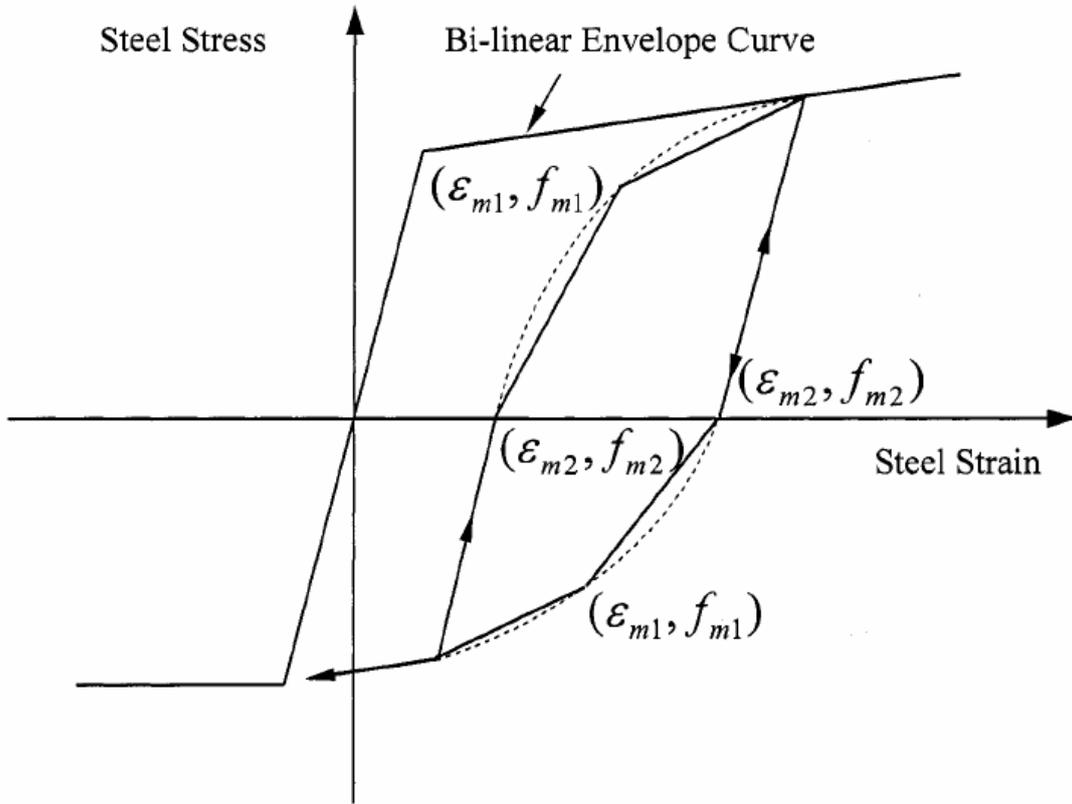


Fig. 3.4 SteelZ01 material model

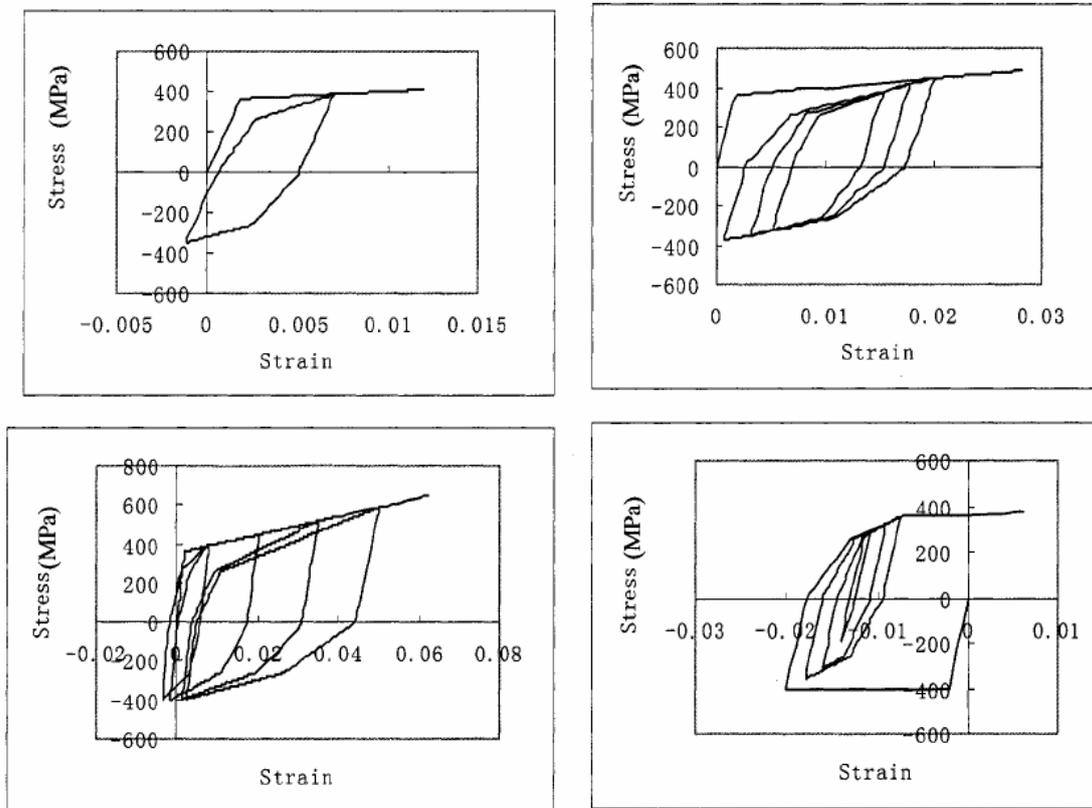


Fig. 3.5 Typical hysteretic loops of the SteelZ01 model

3.2.4 ConcreteZ01

混凝土模型 ConcreteZ01 根据 2.2.3 节中提到的 CSMM 往复单轴混凝土模型而创建。该往复单轴混凝土模型考虑了混凝土桁杆垂直方向拉应变的软化效应。

Concretez01 模型的拉压包络线与 CSMM 中混凝土本构模型相同，包络线的表达式如下：

Compression:

$$\text{(Stage C1)} \quad \sigma^c = D\zeta f'_c \left[2 \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\zeta \varepsilon_o} \right) - \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\zeta \varepsilon_o} \right)^2 \right], \quad 0 \leq |\bar{\varepsilon}| \leq |\zeta \varepsilon_o|, \quad (3.7)$$

$$\text{(Stage C2)} \quad \sigma^c = D\zeta f'_c \left[1 - \left(\frac{\bar{\varepsilon} / \varepsilon_o - 1}{4 / \zeta - 1} \right)^2 \right], \quad |\bar{\varepsilon}| > |\zeta \varepsilon_o|, \quad (3.8)$$

where

$$\zeta = \frac{5.8}{\sqrt{f'_c \text{ (MPa)}}} \frac{1}{\sqrt{1 + 400 \bar{\varepsilon}'_T / \eta'}} \leq 0.9, \quad (3.9)$$

$$D = 1 - 0.4 \frac{\bar{\varepsilon}'_c}{\varepsilon_o} \leq 1.0. \quad (3.10)$$

$$\eta' = \frac{\rho_t f_{ty} - \sigma_t}{\rho_\ell f_{ty} - \sigma_\ell} \leq 1.0$$

定义 为 CSMM 中的原始混凝土本构模型。为简化起见，钢筋比 η' / ζ

的影响忽略不计，设 $\eta' = 1.0$ 。

Tension:

$$\text{(Stage T1)} \quad \sigma^c = E_c \bar{\varepsilon}, \quad \text{if } 0 \leq \bar{\varepsilon} < \varepsilon_{cr}, \quad (3.11)$$

$$\text{(Stage T2)} \quad \sigma^c = f_{cr} \left(\frac{\varepsilon_{cr}}{\bar{\varepsilon}} \right)^{0.4}, \quad \text{if } \bar{\varepsilon} > \varepsilon_{cr}. \quad (3.12)$$

CSMM 混凝土本构模型中定义的卸载和重新加载路径在 ConcreteZ01 中简化，如图 3.6 所示。

包络线上升段的卸载和重新加载路径简化为斜率为初始混凝土模量 E_{c0} 的一条直线，

$$\text{where } E_{c0} = 2 f'_c / \varepsilon_o. \quad (3.13)$$

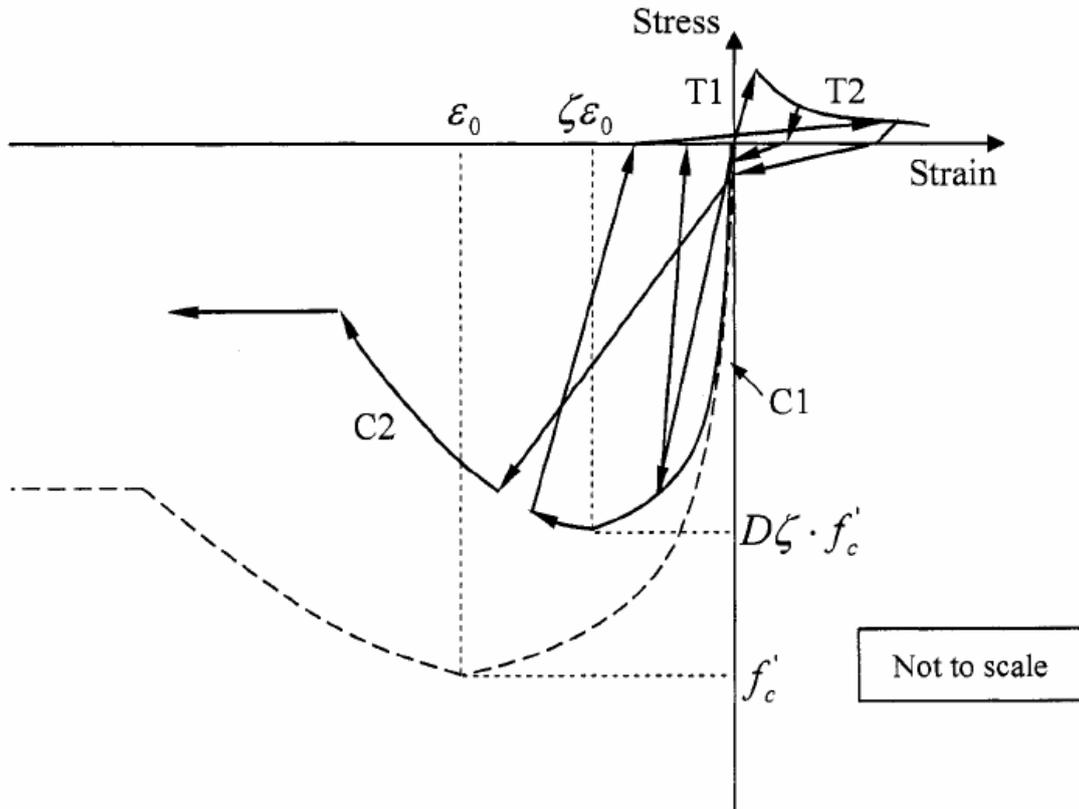


Fig. 3.6 ConcreteZ01 material module

压区包络线下降段的卸载和重新加载路径斜率简化为斜率为 $0.8 E_{c0}$ 。从拉到压的重新加载路径反映了在达到压区包络线峰值之前的混凝土裂缝的完全闭合以及达到峰值之后的部分闭合。

3.5.2 ConcreteZ02

Concretez01 中, 式 23.7 压区上升段。根据式 3.7, 混凝土抗压初始模量为 E_{c0} , 即 $2f'_c / \epsilon_0$ 。式 3.7 能准确描述大多数混凝土的受压行为。然而, 对于弹性模量远小于 E_{c0} 的混凝土而言, 需要修正混凝土的抗压本构关系。图 3.7 中所示的混凝土模型 ConcreteZ02 修正了 ConcreteZ01 模型, 其受压包络线的初始线性路径斜率修正为 E_c 。 E_c 是混凝土受压弹性模量, 为 ConcreteZ02 的一个参数, 需要用户输入。受压包络线上升和下降段的卸载重复加载路径斜率考虑为 E_c 何 $0.8 E_c$ 。 E_c 的取值区间为 $2f'_c / \epsilon_0$ 至 f'_c / ϵ_0 。

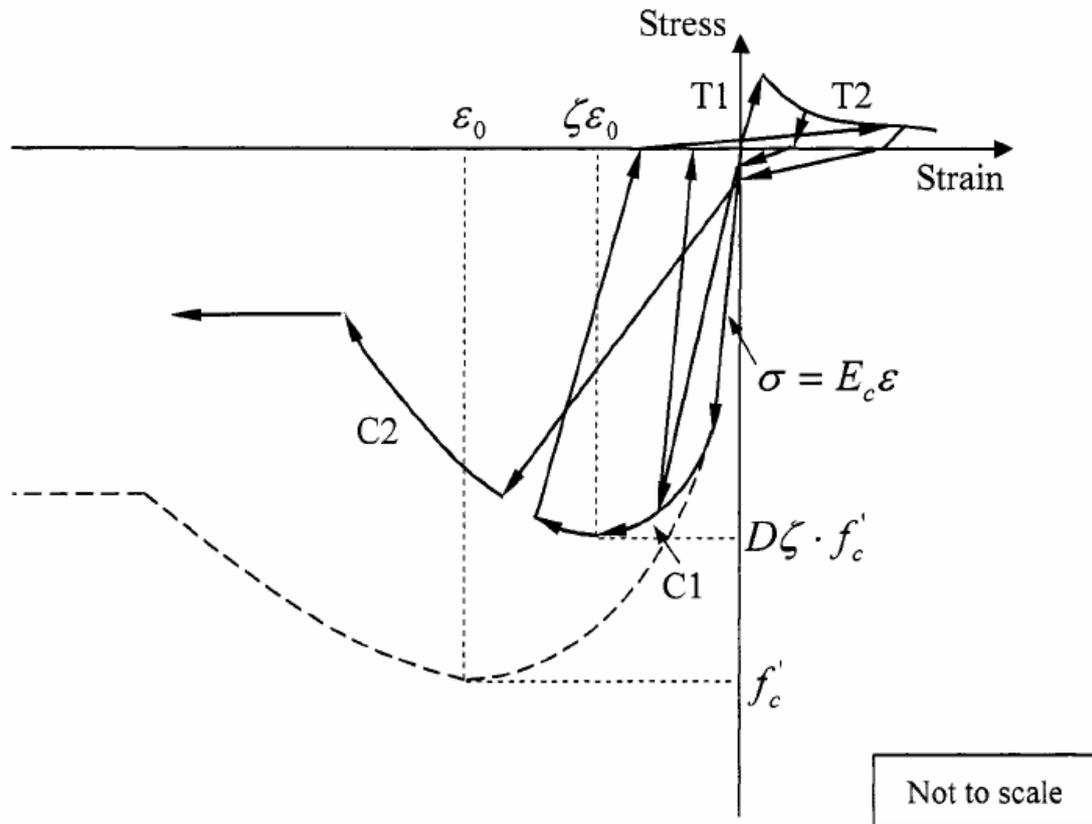


Fig. 3.7 ConcreteZ02 material module

3.3 CSMM 的有限元列式

3.3.1 坐标系统

三维笛卡尔坐标系， x - y , 1-2, x_{si} - y_{si} , 在钢筋混凝土单元中定义，如图 3.8 所示。 x - y 坐标系表示单元的局部坐标，1-2 表示施加应力的应力主轴方向，与 x - y 坐标成 θ_1 夹角。钢筋可以在混凝土中各向分布。 X_{si} - y_{si} 坐标系表示第 i 个方向的钢筋，钢筋所在方向 x_{si} 轴与 x - y 坐标系成 θ_{si} 夹角。

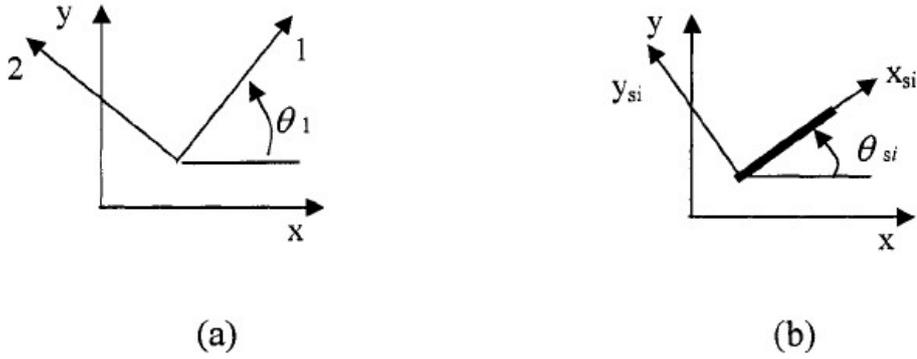


Fig. 3.8 Coordinate systems for reinforced concrete elements: (a) applied principal stresses in local coordinate (b) reinforcement component in local coordinate

x-y 和 1-2 坐标系中的应力应变向量分别记为 $\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$,

$$\left\{ \varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \frac{1}{2} \tau_{xy} \right\}^T, \{\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \tau_{12}\}^T \text{ 和 } \left\{ \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \frac{1}{2} \tau_{12} \right\}^T, \text{ 其中 } \tau_{12}=0,$$

因为 1-2 坐标系表示主应力方向。

通过转换矩阵 $[T(\alpha)]$, 应力和应变可以在不同坐标系下转换。 $[T(\alpha)]$ 为:

$$[T(\alpha)] = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -sc & sc & c^2 - s^2 \end{bmatrix}, \quad (3.14)$$

其中 $c = \cos(\alpha)$, $s = \sin(\alpha)$, 夹角 α 为两坐标系的夹角。

使用转换矩阵把应力和应变从 x-y 坐标系转换到 1-2 坐标系的表达如下:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ 0 \end{Bmatrix} = [T(\theta_1)] \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}, \quad (3.15)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [T(\theta_1)] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (3.16)$$

3.3.2 平衡和协调方程

施加在 x-y 方向的应力 $\{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}$ 和主应力方向的内力 $(\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy})$ 已经钢筋方向的钢筋应力 (f_{si}) 由平衡方程联系起来:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T(-\theta_1)] \begin{Bmatrix} \sigma_1^c \\ \sigma_2^c \\ \tau_{12}^c \end{Bmatrix} + \sum_i [T(-\theta_{si})] \begin{Bmatrix} \rho_{si} f_{si} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.17)$$

其中 ρ_{si} 为 i 方向的配筋率; $[T(-\theta_1)][T(-\theta_1)]$ 分别是 1-2 和 $x_{si} - y_{si}$ 坐标系对 x-y 坐标系的转换矩阵。

协调方程定义为 $x_{si} - y_{si}$ 向钢筋应变 (ε_{si}) 和 1-2 向混凝土应变 $\left\{ \varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \frac{1}{2} \tau_{12} \right\}^T$

的关系, 如式 3.18:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{si} \\ \varepsilon_{si} \\ \frac{1}{2} \gamma_{si} \end{Bmatrix} = [T(\theta_{si} - \theta_1)] \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.18)$$

需要指出的是, 式 3.18 中的钢筋应变 (ε_{si}) 和混凝土应变 $(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2)$ 均为双轴应变。

3.3.3 双轴应变 vs 单轴应变

(Hsu 和 Zhu, 2002) 已经使用 Hsu/Zhu ratio $((\nu_{12}, \nu_{21}))$ 推导出了双轴应变和单轴应变的关系, 第二章已经介绍了 Hsu/Zhu ratio $((\nu_{12}, \nu_{21}))$, 混凝土双轴应变 $(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2)$ 转换得到混凝土单轴应变 $(\overline{\varepsilon_1}, \overline{\varepsilon_2})$, 然后再转换得到如下的钢筋单轴应变 $(\overline{\varepsilon_{si}})$:

$$\begin{Bmatrix} \overline{\varepsilon_1} \\ \overline{\varepsilon_2} \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix} = [V] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{1}{2} \gamma_{12} \end{Bmatrix}, \quad (3.19)$$

其中

$$[V] = \begin{bmatrix} \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{12}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ \frac{\nu_{21}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & \frac{1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

and

$$\begin{Bmatrix} \overline{\varepsilon}_{st} \\ \overline{\varepsilon}_{si} \\ \frac{1}{2}\gamma_{si} \end{Bmatrix} = [T(\theta_{st} - \theta_1)] \begin{Bmatrix} \overline{\varepsilon}_1 \\ \overline{\varepsilon}_2 \\ \frac{1}{2}\gamma_{12} \end{Bmatrix}. \quad (3.21)$$

当通过式 (3.19) 和 (3.21) 得到混凝土和钢筋的单轴应变后 $(\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2) (\overline{\varepsilon}_{si})$, 式 (3.17)

中的混凝土应力 $(\sigma_1^c \quad \sigma_2^c \quad \tau_{12}^c)$ 和钢筋应力 (f_{si}) 可以通过材料的单轴本构关系求得。

3.4 材料本构矩阵

材料本构矩阵表示单元的应力应变状态的关系。材料本构矩阵也被一些研究员称作材料刚度阵。材料本构矩阵可以以割线或切线列式表达。材料割线本构矩阵表示单元应变和应力绝对值的关系，而切线本构矩阵表示单元应力应变增量的关系。这一章，使用 CSMM 的钢筋混凝土膜材料本别以割线和切线列式推导。材料本构矩阵的详细推导见附录 A。本文的有限元分析使用材料切线本构矩阵，因为 OpenSees 采用切线刚度列式。

3.4.1 材料割线本构矩阵

钢筋混凝土平面应力单元的材料割线本构矩阵 $[D]$ 列式为：

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} \end{Bmatrix}. \quad (3.22)$$

$[D]$ is evaluated by

$$[D] = [T(-\theta_1)][D_c][V][T(\theta_1)] + \sum_i [T(-\theta_{si})][D_{si}][T(\theta_{si} - \theta_1)][V][T(\theta_1)], \quad (3.23)$$

其中

$[D_c]$ 为混凝土单轴割线本构矩阵,

$[D_{si}]$ 为钢单轴割线本构矩阵;

$[V]$ 为式 (3.20) 中使用 Hsu/Zhu ratio 把双轴应变转换为单轴应变的矩阵,

$[T(\theta_1)]$ 为 x-y 对 1-2 坐标系的转换矩阵

$[T(-\theta_1)]$ 为 1-2 对 x-y 坐标系的转换矩阵

$[T(-\theta_{si})]$ 为 xsi-ysi 对 x-y 坐标系的转换矩阵

$[T(\theta_{si} - \theta_1)]$ 为 1-2 对 xsi-ysi 坐标系的转换矩阵

混凝土单轴刚度阵 $[D]$ 为:

$$[D_c] = \begin{bmatrix} \bar{E}_1^c & 0 & 0 \\ 0 & \bar{E}_2^c & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^c \end{bmatrix}, \quad (3.24)$$

其中 \bar{E}_1^c 和 \bar{E}_2^c 为某一应力/应变状态下 1、2 方向的混凝土单轴模量的割线刚度,

$$G_{12}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \quad \text{为式 (2.20) 给出的混凝土剪切模量。}$$

钢筋单轴刚度阵 $[D_{si}]$ 为:

$$[D_{si}] = \begin{bmatrix} \rho_{si} \cdot \bar{E}_{si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.25)$$

其中 \bar{E}_{si}^c 为钢筋单轴割线模量，在一特定应力/应变状态下确定。

$[D]$ 通过平衡方程、相容方程和 CSMM 中定义的材料本构关系推导得出。如式 (3.23) 所示，矩阵 $[D]$ 由钢筋和混凝土组成。式 (2.23) 右边第一项

$$[T(-\theta_1)][D_c][V][T(\theta_1)] \quad [T(-\theta_1)][D_c][V][T(\theta_1)]$$

，为混凝土的贡献。

为局部坐标系中给定单元应变下计算局部坐标下混凝土的式子。这一转换的过程可以通过

$$[T(-\theta_1)][D_c][V][T(\theta_1)]$$

从右向左的描述出来。首先，矩阵 $[T(\theta_1)]$ 为单元双轴

应变从局部坐标系转换为主应力坐标的转换矩阵；然后，矩阵 $[V]$ 用来在主应力坐标系下

把双轴应变转换为单轴应变；通过混凝土单轴刚度阵 $[D_c]$ ，可以得到主应力方向的混凝土

应力；最后，通过使用转换矩阵 $[T(-\theta_1)]$ 主应力方向的混凝土应力转换回局部坐标系。

$$\sum_i [T(-\theta_{si})][D_{si}][T(\theta_{si} - \theta_1)][V][T(\theta_1)]$$

式 (3.23) 右边部分的第二项，

$$[T(\theta_{si} - \theta_1)][V][T(\theta_1)]$$

为钢筋的贡献。由式 (3.19) 和 (3.21)，可以得到第 i 方

向的钢筋单轴应变。然后，使用钢筋单轴刚度阵 $[D_{si}]$ 计算第 i 向钢筋应力。最后，i 方向

的钢筋应力通过转换矩阵 $[T(-\theta_{si})]$ 转换回局部坐标系。

3.4.2 材料切线本构矩阵

对于本文使用的方法，钢筋混凝土单元的列式为切线本构矩阵 $[\bar{D}]$ ：

$$[\bar{D}] = \frac{d \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}}{d \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy} \end{Bmatrix}}. \quad (3.26)$$

$[\bar{D}]$ 通过计算得到:

$$[\bar{D}] = [T(-\theta_1)][\bar{D}_c][V][T(\theta_1)] + \sum [T(-\theta_{si})][\bar{D}_{si}][T(\theta_{si} - \theta_1)][V][T(\theta_1)], \quad (3.27)$$

其中 $[D_c]$ 为混凝土单轴切线刚度阵, $[D_{si}]$ 为钢筋单轴切线刚度阵。式中 (3.23) 另一个 $[\bar{D}]$ 为同样的定义。

混凝土单轴本构矩阵 $[\bar{D}_c]$ 为:

$$[\bar{D}_c] = \begin{bmatrix} \bar{E}_1^c & \frac{\partial \sigma_1^c}{\partial \varepsilon_2} & 0 \\ \frac{\partial \sigma_2^c}{\partial \varepsilon_1} & \bar{E}_2^c & 0 \\ 0 & 0 & G_{12}^c \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

其中 \bar{E}_1^c 和 \bar{E}_2^c 分别为某一应力/应变状态下 1、2 向的混凝土单轴切线模量; 非对角元素

$\frac{\partial \sigma_1^c}{\partial \varepsilon_2}$ and $\frac{\partial \sigma_2^c}{\partial \varepsilon_1}$ 通过使用单轴本构关系得到, 并考虑 1-2 向非零的混凝土应力和单轴应变状态, 因为混凝土受压时的应力和应变被各向异性的拉应变软化, 式 (2.20) 给出

$$G_{12}^c = \frac{\sigma_1^c - \sigma_2^c}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}.$$

混凝土剪切模量

$$[\overline{D}_{si}] = \begin{bmatrix} \rho_{si} \cdot \overline{E}_{si} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.29)$$

其中 \overline{E}_{si} 为某一特定应力/应变状态下钢筋单轴切线模量。

3.5 RC 平面应力结构的分析方法

确定材料切线本构矩阵 $[\overline{D}_c]$ 后，单元切线刚度矩阵可以通过几本的有限元法得出：

$$[K]_e = \int_V [B]^T [\overline{D}] [B] dV, \quad (3.30)$$

其中 $[B]$ 是基于假设的形函数的矩阵。（即应变-位移矩阵）

钢筋混凝土结构进行非线性分析需要进行切线刚度迭代的过程。图 3.9 显示了使用 Newton-Raphson 法的增量迭代分析流程图。通过这一方法，可以先得到材料切线本构矩阵

$[\overline{D}]$ ，然后计算得到单元切线刚度矩阵 $[k]$ 和单元抵抗力增量向量 Δf 。之后，组装

得到整体刚度矩阵 $[K]$ 和整体抵抗力增量 ΔF 。材料本构矩阵 $[\overline{D}]$ 、单元切线刚度矩

阵 $[k]$ 、整体刚度矩阵 $[K]$ 在每次迭代中更新直至满足收敛准则。

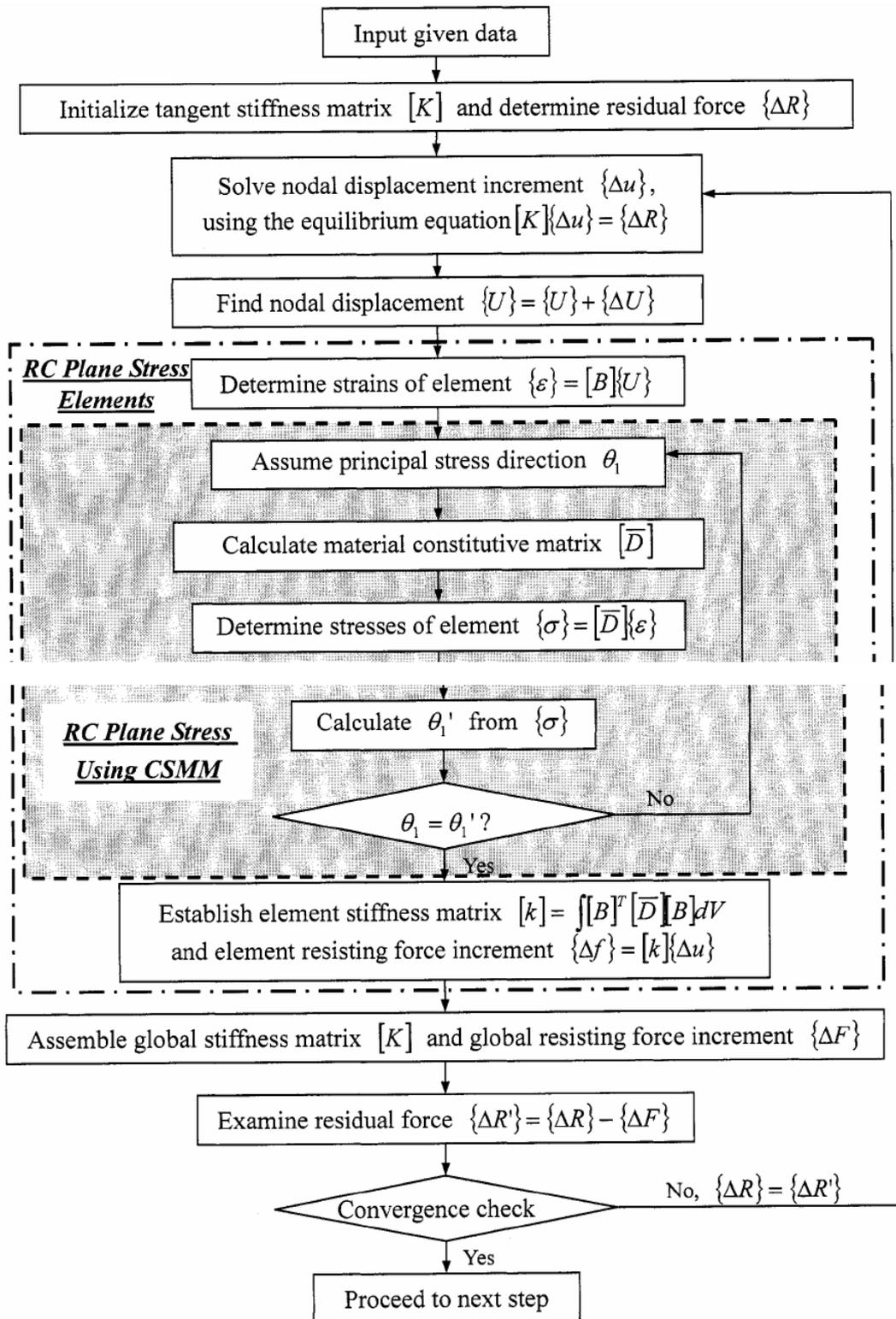


图 3.9 非线性分析算法

图 3.9 中灰块显示了使用 CSMM 的材料本构矩阵形成过程。它指出为得到钢筋混凝土平面

应力单元的材料本构矩阵 $[D]$ 需要再附加一个迭代过程，因为在得到 $[D]$ 以前主应

力角 θ_1 是未知的。RC 平面应力单元的刚度计算过程为图 3.9 中的外面白色块。

图 3.9 流程图需要指出一些问题：

- 1) 该流程图为 RC 平面应力结构使用荷载增量的简单分析过程。可以使用其他静力积分的方法如荷载控制法，和动力积分法，如 Newmark 法和 Wilson- θ 法适用于各种非线性有限元分析。3.6 节简单介绍了本文使用的静力动力积分方式。
- 2) 流程图中算法使用了 Newton-Raphson 法。每次迭代中计算材料本构矩阵 $\overline{[D]}$ 、单元切线刚度阵 $[k]$ 和整体刚度阵 $[K]$ 。同样可以使用修正的 Newton-Raphson 法和使用加速度技术的 Newton-Type 法如 KrylovNewton 法(Carlson and Miller 1998)。3.6.1 节简单介绍了常用的迭代算法。
- 3) 流程图中的增量平衡方程 $[K]\{\Delta u\} = \{\Delta R\}$ 用于静力分析。对于动力分析，运动的增量方程有相似的形式，不过刚度阵 $[K]$ 和 $\{\Delta R\}$ 需要包含每一时间步的质量、阻尼比、算法参数、速度和加速度等系统特性。3.6.3 和 3.6.4 节分别描述了动力分析中的 Newmark 法和 Wilson- θ 的运动增量方程。
- 4) 需要定义收敛准则以判断迭代是否已经收敛。准则可定义为节点非平衡力、位移增量和能量增量。常用的收敛准则为力准则、位移准则和能量准则。给予相对正则值的准则如下所示：

$$\text{Force criterion: } \frac{\left(\sum R_i^T R_i\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum R_0^T R_0\right)^{\frac{1}{2}}} < TOL, \quad (3.31)$$

$$\text{Displacement criterion: } \frac{\left(\sum (\Delta U_i)^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\sum (\Delta U_0)^2\right)^{\frac{1}{2}}} < TOL, \quad (3.32)$$

$$\text{Energy criterion: } \frac{\left(\sum \Delta U_i^T R_i\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\Delta U_0^T R_0\right)^{\frac{1}{2}}} < TOL, \quad (3.33)$$

其中：

ΔU 为节点位移增量

R 为节点非平衡力

下标 i 表示第 i 次迭代

下表 0 表示第一次迭代

TOL 为容许偏差，根据问题的精确度要求而定。

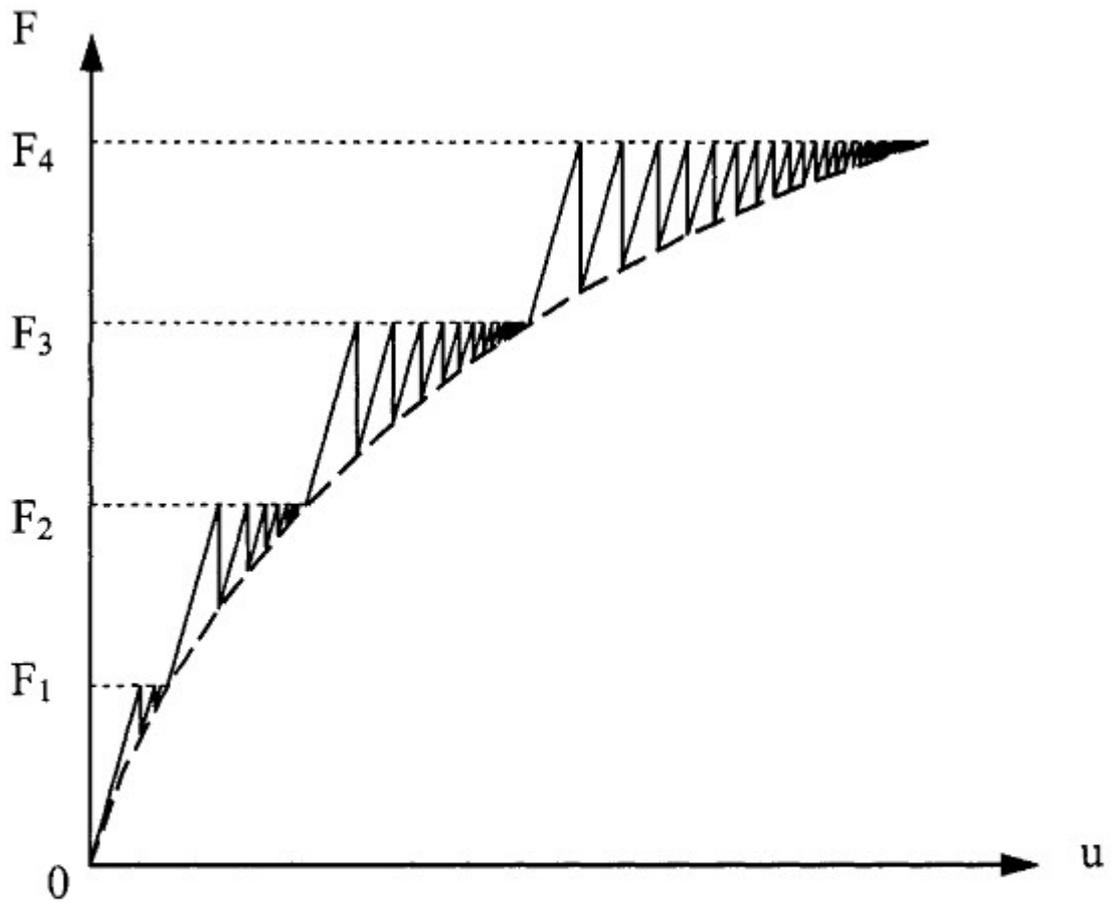
3.6 求解算法

通常使用增量法研究非线性有限元问题。对于非线性问题，增量法会导致误差积累。使用某一算法的迭代过程可以纠正累积误差。因此，大多数非线性有限元分析的基础既是增量法和迭代过程的组合。分析过程中，积分算法确定了分析过程的下一步预测，并决定了迭代的切线矩阵和参与向量。本文介绍了静力动力分析常用的积分算法，比如力控制、位移控制、Newmark 法和 Wilson- θ 法，以及它们的分析过程。算法确定了迭代过程中解非线性方程的步骤。本节也描述了不同的算法，3.6.1 节对不同算法进行了简单比较。

3.6.1 荷载控制迭代法

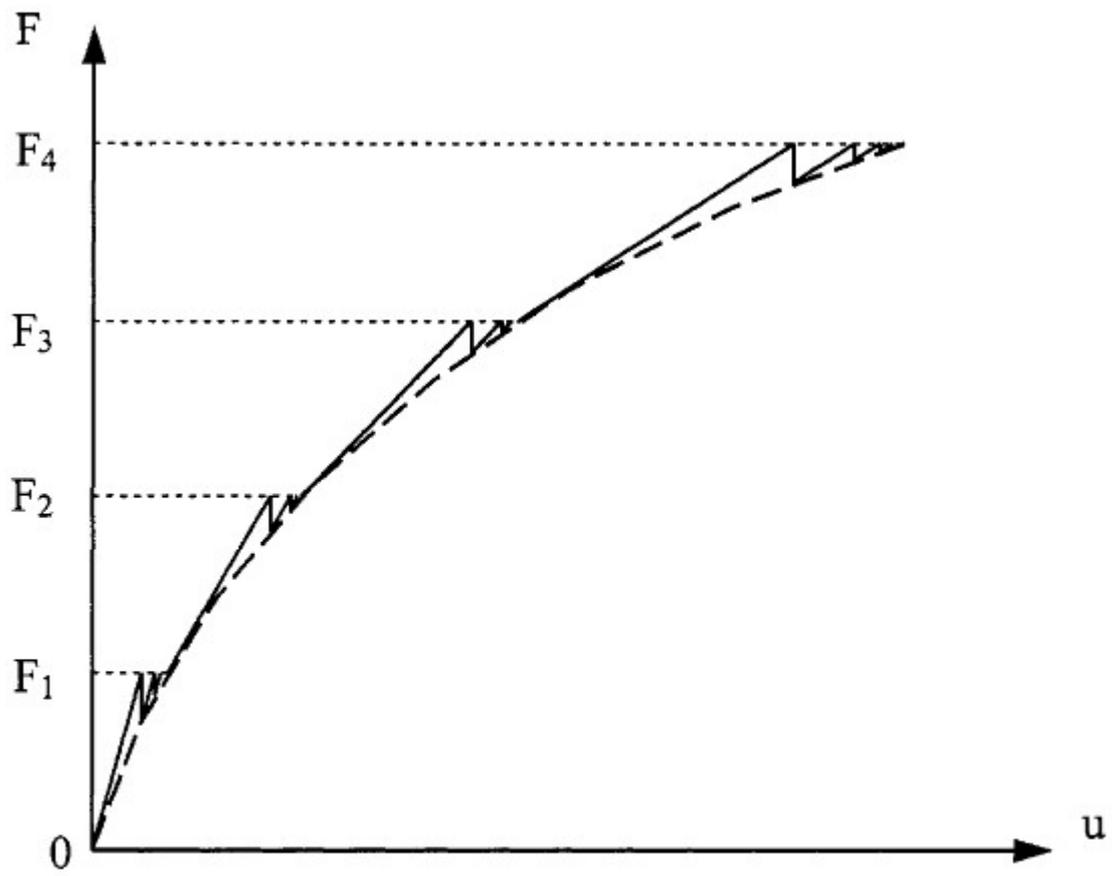
通常使用增量过程研究非线性有限元问题。结构切线刚度阵为荷载增量和位移增量的关系，其中包含了表示应力应变增量关系的材料切线本构矩阵。荷载控制时，总荷载被划分为小的荷载增量。依次施加荷载增量，开始进行迭代直至结构层面上达到收敛，然后进行下一步加载。

解非线性方程，常用的算法是完全 Newton-Raphson 法。每次迭代中，刚度阵依次更新直至收敛。刚度阵从上一次迭代解中计算，直至收敛。也可使用修正 Newton-Raphson 法。与完全 Newton-Raphson 法不同是，整个迭代过程均使用上次收敛的平衡方程，直至本次迭代收敛。整个迭代过程中，初始刚度法使用初始刚度阵。

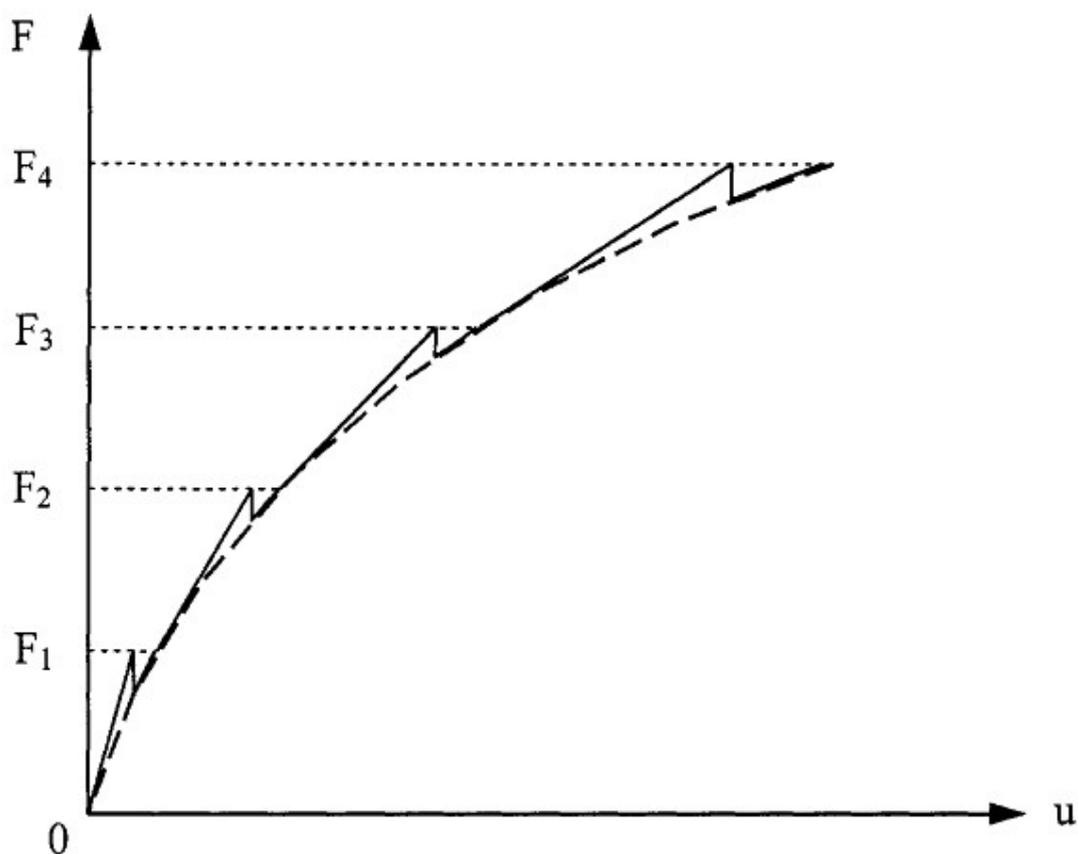


(a) Initial stiffness algorithm

Fig. 3.10 Iterative algorithm under load control



(b) Modified Newton-Raphson algorithm



(c) Full Newton-Raphson algorithm

Fig. 3.10 Iterative algorithm under load control (continued)

Newton-Raphson 法收敛速度快，图 3.10 (c) 中方法仅需少量迭代即可收敛。每次迭代，残余应力比图 3.10 (a) 和 (b) 方法的参与应力要小。但是，每次迭代均需要获得切线刚度阵，对于大型结构而言工作量很大。图 3.10 (a) 显示了初始刚度法的迭代过程。对比完全 Newton-Raphson 法，每次施加荷载的开始即计算出初始刚度阵，并在迭代过程中保持不变。收敛需要多次迭代。修正 Newton-Raphson 法平衡了计算和迭代次数。通过使用加速度技术改进 Newton-Type 法可得到许多算法，比如 KrylovNewton 法 (Carlson and Miller 1998)。KrylovNewton 法为使用“Krylov 子空间”加速度的修正 Newton-Raphson 法，从而大大减少了求解的迭代次数。

3.6.2 位移控制迭代法

有两种方法给结构施加荷载：荷载控制和位移控制。可以通过位移控制法得到完整的荷载-位移曲线，包括上升段、下降段和滞回环。另外，接下来还将描述位移控制相比荷载控制的优点。

- 1) 荷载控制不能显示结构的局部响应，比如混凝土开裂导致的力暂时降低。更重要的是，它不能得到结构极限强度和峰值后的结构响应。荷载控制时荷载-位移曲线的顶点附近切线刚度阵几乎奇异。Ayoub (1995) 和 Ayoub and Filippou (1998) 指出求解不能收敛并不是说明结构已经倒塌，而是由于解法收敛性不好。位移控制时，特别是用弧长法进行位移控制，可以得到开裂点和最大值之后的结构响应，并能得到完整的上升和下降段的响应。

2) 不考虑个人喜好问题时，位移控制法显示出比荷载控制法更快和更稳定的收敛特征，本文中也可以从钢筋混凝土平面应力结构的非线性有限元分析中观察到这一特性。

许多研究者（例如：Zienkiewicz1971；Haisler 等，1997；Batoz 和 Dhatt1979）提出了位移控制法以解决荷载控制法的局限性。同时，非线性分析中诞生了弧长法来解决局部和整体有限点（limit points）的问题，弧长法中荷载因子为变量。Riks（1972）最先提出了弧长法，Crisfield（1981）使之改进。接下来介绍 Batoz 和 Dhatt（1979）最先提出的基于弧长法的位移控制。

位移增量分为两部分：

$$\Delta u = \Delta u_u + \lambda \Delta u_r, \quad (3.34)$$

其中

Δu =非平衡荷载产生的位移增量

Δu_r =参考荷载产生的位移增量

λ =荷载因子，待定的系数

现在，定义操作向量

$$\Gamma_n = \begin{Bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (3.35)$$

其中只有第 n 个元素为 1，其余均为 0.

一阶估计值 Δu_u 和 Δu_r 可以解线性方程组得到：

$$\Delta u_u = K_t^{-1} \Delta P_u, \quad (3.36)$$

$$\Delta u_r = K_t^{-1} \Delta P_r, \quad (3.37)$$

其中：

K_t =刚度阵

ΔP_u =外部非平衡荷载

$$\Delta P_r = p_r \Gamma_n;$$

p_r =参考荷载的大小

荷载增量第 n 个元素可表示为：

$$\Gamma_n \cdot \Delta u = \Gamma_n \cdot \Delta u_u + \lambda \Gamma_n \cdot \Delta u_r. \quad (3.38)$$

对于施加在第 n 个自由度上的指定位移增量 δ ，式 (3.38) 可以表示如下：

$$\Gamma_n \cdot \Delta u = \Gamma_n \cdot \Delta u_u + \lambda \Gamma_n \cdot \Delta u_r = \delta. \quad (3.39)$$

完成 δ 的迭代过程表示如下：

(1) 第一次迭代从式 (3.39) 中可得到

$$\lambda = \frac{\delta - \Gamma_n \cdot \Delta u_u}{\Gamma_n \cdot \Delta u_r}. \quad (3.40)$$

(2) 接下来的迭代中第 n 个自由度必须保持不变，即：

$$\Gamma_n \cdot \Delta u = \Gamma_n \cdot \Delta u_u + \Delta \lambda \cdot \Gamma_n \cdot \Delta u_r = 0. \quad (3.41)$$

$$\text{So } \Delta \lambda = -\frac{\Gamma_n \cdot \Delta u_u}{\Gamma_n \cdot \Delta u_r}, \quad (3.42)$$

$$\lambda = \lambda + \Delta \lambda, \quad (3.43)$$

其中 $\Delta \lambda$ 为参考荷载因子的增量

(3) 收敛满足后，可以得到产生指定荷载增量的真实荷载 P ：

$$P = \lambda \cdot P_r. \quad (3.44)$$

该位移控制法可以结合 Newton 型的算法。

3.6.3 Newmark 法

动力学分析中 Newmark 法 (Newmark1959) 和 Wilson- θ 法是鼎鼎大名的两个方法。OpenSees 已经在对象中加入了这两种方法。本节和下一节分别简单介绍 Newmark 和 Wilson- θ 法的理论背景，也介绍了使用这两种方法的非线性系统迭代过程。

第 i 步和第 $i+1$ 步的位移、速度和加速度的显式关系为：

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + (\Delta t)\ddot{u}_i, \quad (3.45)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + 0.5(\Delta t)^2 \ddot{u}_i, \quad (3.46)$$

其中 u_i, \dot{u}_i and \ddot{u}_i 为第 i 步位移、速度和加速度的粗略值， Δt 为时间间隔。

Newmark (1959) 提出了求解结构动力学最流行的算法之一。方法基于从第 i 步到第 $i+1$ 步的位移、速度和加速度的插值：

$$\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + [(1-\gamma)\Delta t]\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\ddot{u}_{i+1}, \quad (3.47)$$

$$u_{i+1} = u_i + (\Delta t)\dot{u}_i + [(0.5-\beta)(\Delta t)^2]\ddot{u}_i + [\beta(\Delta t)^2]\ddot{u}_{i+1}, \quad (3.48)$$

其中 u_{i+1} , \dot{u}_{i+1} , and \ddot{u}_{i+1} 为第 $i+1$ 步的粗略值; β 和 γ 为不同 Newmark 法定义参数。

通常的 γ 和 β 是 $\gamma = \frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{6} \leq \beta \leq \frac{1}{4}$ 。当 $\gamma = \frac{1}{2}$ 和 $\beta = \frac{1}{4}$ 时, Newmark 法称作平均加速度法。平均加速度法是无条件稳定的。当 $\gamma = \frac{1}{2}$ 和 $\beta = \frac{1}{6}$ 时, 称作线性加速度法。

线性加速度法的稳定条件是 $\frac{\Delta t}{T_n} = 0.551$, 其中 T_n 为结构最短的自然周期。

对于非线性系统的增量法列式, 式 (3.47) 和 (3.48) 可写作:

$$\Delta \dot{u}_i = (\Delta t)\ddot{u}_i + (\gamma\Delta t)\Delta \ddot{u}_i, \quad (3.49)$$

$$\Delta u_i = (\Delta t)\dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{u}_i + \beta(\Delta t)^2\Delta \ddot{u}_i. \quad (3.50)$$

Eq. (3.50) can be solved as

$$\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}\Delta u_i - \frac{1}{\beta(\Delta t)}\dot{u}_i - \frac{1}{2\beta}\ddot{u}_i. \quad (3.51)$$

Substituting Eq. (3.51) into (3.49) gives

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta}\dot{u}_i + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{u}_i. \quad (3.52)$$

The incremental equation of motion is given by

$$m\Delta u_i + c\Delta \dot{u}_i + k\Delta \ddot{u}_i = \Delta p_i. \quad (3.53)$$

Substituting Eqs. (3.51) and (3.52) into Eq. (3.53) gives

$$\Delta \dot{u}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta u_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{u}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{u}_i. \quad (3.52)$$

The incremental equation of motion is given by

$$m \Delta u_i + c \Delta \dot{u}_i + k \Delta \ddot{u}_i = \Delta p_i. \quad (3.53)$$

Substituting Eqs. (3.51) and (3.52) into Eq. (3.53) gives

$$\hat{k}_i \Delta u_i = \Delta \hat{p}_i, \quad (3.54)$$

where

$$\hat{k}_i = k_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m, \quad (3.55)$$

$$\text{and } \Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + \left(\frac{1}{\beta \Delta t} m + \frac{\gamma}{\beta} c \right) \dot{u}_i + \left[\frac{1}{2\beta} m + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c \right] \ddot{u}_i, \quad (3.56)$$

其中 k_i 是静力分析中的刚度阵， Δp_i 是施加给结构的荷载增量，对于非线性系统 \hat{k}_i 不为常量。

可以从式 (3.54) 中看出与静力分析相似的过程，需要考虑系统属性 m, c , 加速度参数 β 和 γ ，已经速度和加速度。

对于非线性系统，式 (3.53) 和 (3.54) 描述的增量过程需要进行迭代。以下为 Newmark 法第 i 步时间步的分析过程，使用了修正 Newton-Raphson 法：

- (1) Calculate $\Delta\hat{p}_i$ based on Eq. (3.56).
- (2) Determine the tangent stiffness k_i .
- (3) Calculate \hat{k}_i based on Eq. (3.55)
- (4) Solve $\hat{k}_i\Delta u_i = \Delta\hat{p}_i$ and obtain trial Δu_i , trial $u_i = u_i + \Delta u_i$.
- (5) Determine the resisting force Δf and unbalanced force $\Delta R = \Delta R - \Delta f$.
- (6) Check convergence criterion, if yes, go to step (7), if no, go to step (4).
- (7) Determine $\Delta\dot{u}_i$ and $\Delta\ddot{u}_i$ based on Eqs. (3.52) and (3.51)
- (8) Calculate u_{i+1} , \dot{u}_{i+1} , and \ddot{u}_{i+1} by $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$, $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta\dot{u}_i$, and $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta\ddot{u}_i$, respectively.
- (9) Proceed to the next time step.

需要指出的是，使用修正 Newton-Raphson 法每一时间步只需计算一次切线刚度 k_i 。对于完全 Newton-Raphson 法，每次迭代的（4）至（5）步均需计算切线刚度 k_i 。

3.6.4 Wilson- θ 法

Wilson- θ 法（Wilson1973）是对线性加速度法（ $\gamma = \frac{1}{2}$ 和 $\beta = \frac{1}{6}$ ）这一特殊的

Newmark 法的修正。Wilson- θ 法假设在延长的时间步 $\delta t = \theta\Delta t$ 上加速度线性变化，使得其无条件稳定。

把 $\gamma = \frac{1}{2}$ 和 $\beta = \frac{1}{6}$ 带入式（3.51）到（3.56），时间间隔 Δt 改为 δt ，得到：

$$\delta \dot{u}_i = (\delta t) \ddot{u}_i + \left(\frac{\delta t}{2} \right) \Delta \ddot{u}_i, \quad (3.55)$$

$$\delta u_i = (\delta t) \dot{u}_i + \frac{(\delta t)^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{(\delta t)^2}{6} \delta \ddot{u}_i, \quad (3.56)$$

$$\delta \ddot{u}_i = \frac{6}{(\delta t)^2} \delta u_i - \frac{6}{(\delta t)} \dot{u}_i - 3 \ddot{u}_i, \quad (3.57)$$

$$\delta \dot{u}_i = \frac{3}{\delta t} \delta u_i - 3 \dot{u}_i - \frac{1}{2} \delta t \ddot{u}_i, \quad (3.58)$$

$$\hat{k}_i = k_i + \frac{3}{\theta \Delta t} c + \frac{6}{(\theta \Delta t)^2} m, \quad (3.59)$$

$$\delta \hat{p}_i = \theta \Delta p_i + \left(\frac{6}{\theta \Delta t} m + 3c \right) \dot{u}_i + \left[3m + \frac{\theta \Delta t c}{2} \right] \ddot{u}_i. \quad (3.60)$$

使用修正 Newton-Raphson 法的 Wilson- θ 法迭代过程如下：

- (1) Calculate $\delta \hat{p}_i$ based on Eq. (3.60).
- (2) Determine the tangent stiffness k_i .
- (3) Calculate \hat{k}_i based on Eq. (3.59).
- (4) Solve $\hat{k}_i \delta u_i = \delta \hat{p}_i$ and obtain trial δu_i , trial $u_i = u_i + \delta u_i$.
- (5) Determine the resisting force δf and unbalanced force $\delta R = \delta R - \delta f$.
- (6) Check convergence criterion, if yes, go to step (7), if no, go to step (4).
- (7) Determine $\delta \ddot{u}_i$ based on Eqs. (3.57) and $\Delta \ddot{u}_i = \frac{1}{\theta} \delta \ddot{u}_i$ for $\delta t = \theta \Delta t$.
- (8) $\Delta \dot{u}_i = (\Delta t) \ddot{u}_i + \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \Delta \ddot{u}_i$; $\Delta u_i = (\Delta t) \dot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}_i + \frac{(\Delta t)^2}{6} \Delta \ddot{u}_i$.
- (9) $u_{i+1} = u_i + \Delta u_i$; $\dot{u}_{i+1} = \dot{u}_i + \Delta \dot{u}_i$; $\ddot{u}_{i+1} = \ddot{u}_i + \Delta \ddot{u}_i$.
- (10) Proceed to the next time step.

如果 $\theta=1$, Wilson- θ 法既是线性加速度法, 其稳定条件为 $\Delta t < 0.551T_n$ 。如果 $\theta \geq 1.37$,

Wilson- θ 为无条件稳定。

3.7 非线性有限元程序 SRCS

本章陈述了静动力分析积分算法的理论背景，包括荷载控制法、位移控制法、Newmark法和 Wilson- θ 法。这些积分算法包含非线性分析的算法。这些积分法和算法已经存在于 OpenSees 的组件里，从而使得它可以进行非线性有限元分析。然而，它由于以下原因不能进行 RC 平面应力结构的分析

- 1) 对于 RC 平面应力单元，OpenSees 里没有合适的钢筋和混凝土单轴材料。OpenSees 已有的钢筋和混凝土单轴模型分别是 Steel01 和 Concrete01。Steel01 和 Concrete01 的属性已在 3.1 节中介绍。Steel01 未考虑混凝土中钢筋的弥散屈服应变和应力，卸载和重新加载路径未考虑 Bauschinger 效应。Concrete01 未考虑垂直方向拉应变导致的压应变应力的软化效应。Concrete01 忽略了混凝土的拉应力。
- 2) OpenSees 没有 RC 平面应力材料。因此，不能对板、深梁和墙等 RC 平面应力结构进行分析。
- 3) 此外，OpenSees 的位移控制法仅能进行均位移增量的单调位移控制。需用周期往复加载对位移控制进行修正。

未进行 RC 平面应力结构的分析，本次研究向 OpenSees 系统添加了部分新的材料类别，并更改了部分分析方法，接下来详细介绍调价和修改：

创建并向 OpenSees 系统植入了单轴材料类别 SteelZ01，ConcreteZ01 和 ConcreteZ02。

3.1 节描述了这些材料模型。SteelZ01 需要 4 个输入参数：屈服应力、杨氏模量、混凝土抗压强度以及配筋率。后两个参数用于计算混凝土中钢筋的弥散屈服应力应变。此外，确定卸载和再加载路径形状的系数 A 和 R 为两个附加的输入参数，默认值为 1.9 和 10。ConcreteZ01

需要两个输入参数：极限抗压强度 f_c' 和对应的压应变 ϵ_0 。ConcreteZ02 需要三个输入参数：

极限抗压强度 f_c' 和对应的压应变 ϵ_0 ，以及混凝土抗压杨氏模量。

在 OpenSees 中加入创建的 2D 材料类 RCPlaneStress。RCPlaneStress 为使用 CSMM 的钢筋混凝土平面应力材料的类。RCPlaneStress 中，采用 3.3 节推导的材料本构矩阵并计算应力向量。使用 RCPlaneStress 材料的对象需要一下标签：创建钢筋和混凝土单轴对象 SteelZ01 和 ConcreteZ01，钢筋网格方向，各向配筋率。定义一个 RCPlaneStress 对象需要两个混凝土单轴对象，分别代表混凝土的两个主应力方向。水平和垂直方向不需要钢筋，用户可随意定义钢筋的夹角。钢筋方向也无需各向异性。现在用户可以在钢筋混凝土单元中定义 4 个方向的钢筋。图 3.11 显示了加入 OpenSees 的 RCPlaneStress，图中省去了 ModelBuilder 和 Recorder 对象。RCPlaneStress 采用了四边形单元来表示 RC 平面应力 4 节点单元。RCPlaneStress 与 SteelZ01 和 ConcreteZ01 相关联，来去定材料切线本构矩阵并计算单元应力。对分析过程中的每次位移增量，RCPlaneStress 接受单元应变值，并得到混凝土和钢筋单轴应变，然后发送混凝土单轴应变和垂直方向拉应变给两个混凝土单轴对象。受到单轴应变和相应的拉应变之后，混凝土对象可以计算切线刚度和应力，并把值返回给 RCPlaneStress 对象。类似的，RCPlaneStress 会发送钢筋单轴应变给钢筋单轴对象，并从相关的钢筋单轴对象接收切线刚度和应力。得到混凝土和钢筋的单轴刚度和应力后，可以得出切线刚度阵和应力向量。如图 3.9，使用迭代过程得到收敛的材料本构矩阵和给定应变向量下的应力向量。

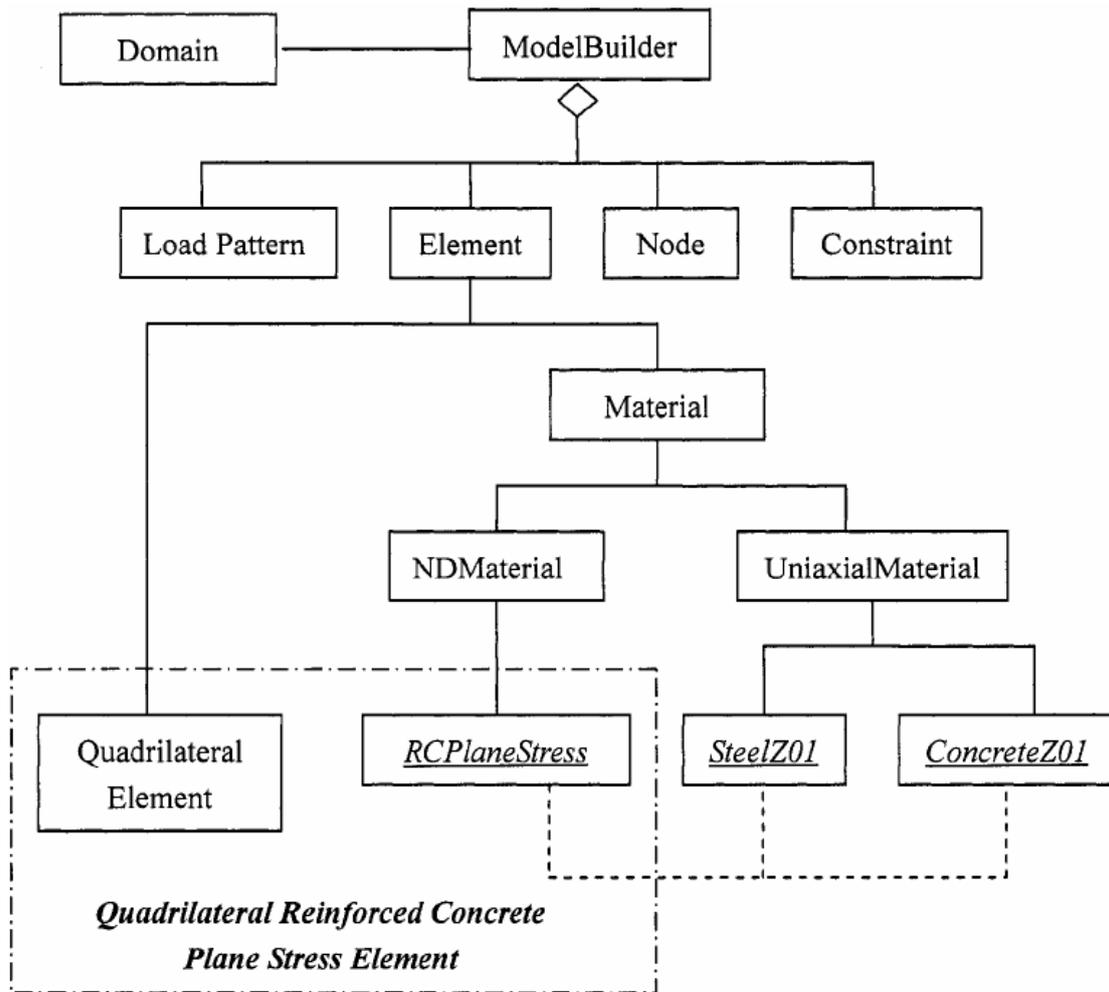


图 3.11 加入 OpenSees 的 RCPlaneStress 模块

同时，把 OpenSees 的位移控制法修正为随机位移路径。用户可以定义节点自由度的位移路径，节点的响应对求解起控制作用。位移法路径的位移增量可以不同。非线性分析中改变位移增量的大小可以克服一些数值问题。

另外，为解决或避免非线性问题分析中的数值问题，修正了一些类（class）。比如，修正了收敛校核的分析模型。不使用对所有的增量给定一个最大的迭代数，用户可以再位移控制过程中对不同路径给出不同的最大迭代数。对可能产生数值问题的特定路径中可以增加最大迭代数，而其他的位移路径则可以定义较少的迭代数以节省时间。

在 OpenSees 中添加完新的材料模型和修改相关已有类之后，采用 OpenSees 作为有限元体系开发出名为 SRCS（钢筋混凝土结构模拟）的有限元程序。该程序可以对静力、周期往复和动力荷载下的钢筋混凝土结构进行非线性有限元分析。第 4 章通过板、框架剪力墙和桥墩的分析与实验对比，证明程序的真实性和准确性。在第 5、6 章中，用该程序对 RC 剪力墙在周期往复何在和地震作用下的响应进行预测。

附录 B 显示了两个 SRCS 输入文件的例子。一个为 4.3 节中描述的框架剪力墙 FSW6 的周期往复分析，另一个是 6.4 节中描述的剪力墙 ST4 在地震作用下的动力分析。通过使用 SRCS 对 RC 平面应力结构的非线性有限元分析，可以得出一下结论：

1) 划分大小：

由于 CSMM 为完全弥散裂缝模型，开裂钢筋混凝土的有限元模型为连续模型。因此，更细的单元划分并不一定能得出更精确的解。

为检验有限元分析中合适的单元大小，RC 剪力墙 FSE6 采用了不同大小的单元划分

。分析结果如图 3.12.

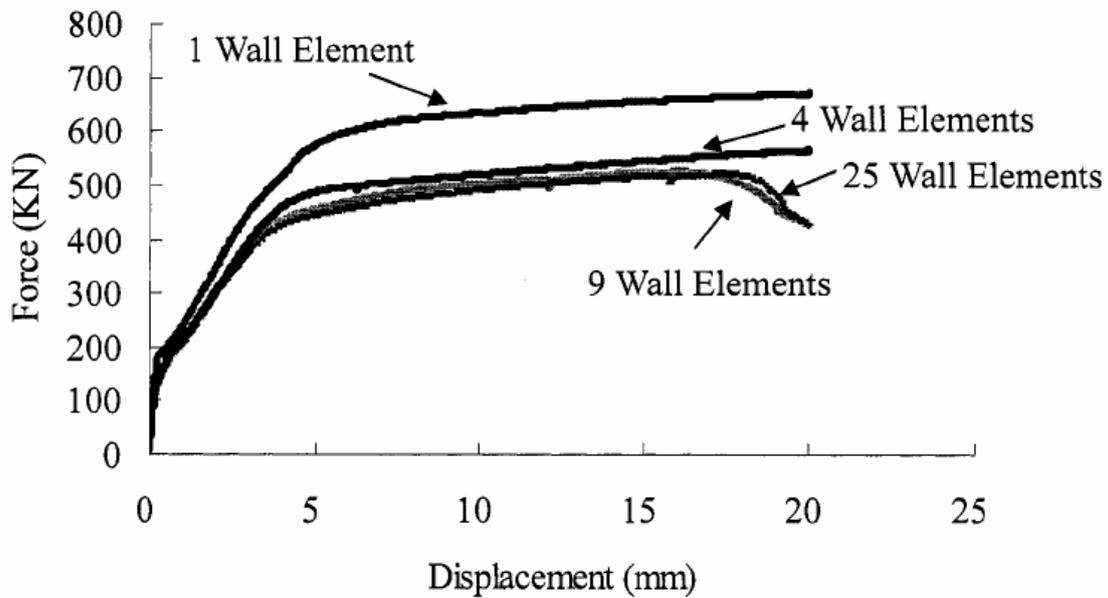


图 3.12 剪力墙采用不同有限元单元划分的分析结果

从图 3.12 分析曲线可以看出，仅使用 1 个墙元的结果远比使用 4、9 和 25 个墙元的结果要高。4 墙元的预测结果比 9、25 墙元稍大，而 9 墙元和 25 墙元的分析曲线几乎一致。通过使用弥散裂缝模型对剪力墙进行有限元分析，Okamura 和 Maekawa (1991) 观察到随着单元的增加，分析曲线迅速收敛。为节省宝贵的计算时间，SRCS 程序中 RC 平面应力单元使用相对较少的单元数量即可得到精确的结果。

2) 非线性求解

相比完全 Newton-Raphson 法和修正 Newton-Raphson 法等其他算法，(Carlson and Miller 1998) 发现使用“Krylov 子空间”及速度的修正 Newton-Raphson 法能更快和更稳定的收敛。

3) 数值问题

非线性有限元分析中可能会遇到数值问题，特别在周期往复分析中。大多数情况下可以通过改变算法、增量大小或增加迭代次数等方法解决这些数值问题。

(本章 Trans by 吴爽)